Lehrbuch

der

allgemeinen Arithmetik und Algebra

für

Lehrerbildungsanstalten sowie zum Selbstunterricht.

In entwickelnder Lehrform bearbeitet

von

K. Fuß,

königl. Seminarlehrer.

Erster Theil:

Die vier Species in relativen Zahlen; Lehre von den Potenzen und Wurzeln; Reductionen; Gleichungen vom ersten und zweiten Grad.

Nürnberg 1878.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Vorwort.

Die meisten Lehrbücher der allgemeinen Arithmetik und Algebra sind nach der streng wissenschaftlichen Methode bearbeitet. Diese geht von Definitionen und Lehrsätzen aus, giebt dieselben den Schülern als etwas bereits Fertiges und sucht sie ihnen durch Beweise zur Einsicht zu bringen. Der Lehrer, der sich dieser Methode beim Unterricht bedient, will durch die Wissenschaft selbst, durch die vollendete Form, bilden, das Verständniß durch diese erschließen.

Ganz anders der elementarisch unterrichtende Lehrer. Dieser legt seinen Schülern das Material, in dem sich die zu suchenden mathematischen Wahrheiten ausprägen, vor, und veranlaßt jene, diese daraus selbst abzuleiten. Auf die streng wissenschaftlichen Beweise derselben verzichtet er anfangs; es genügt ihm, wenn seine Schüler dieselben klar und sicher erfaßt und deren Richtigkeit aus unmittelbarer Anschauung erkannt haben. „Suchet selbst, denket darüber nach, wie es ist und wie es sein muß", fordert er fortwährend von ihnen, und begnügt sich nicht mit der Mittheilung an dieselben: „Das ist so und wird so bewiesen". Die vollendete wissenschaftliche Form ist ihm nicht *Mittel*, sondern *Ziel* des Unterrichts, mit ihr *fängt* er nicht *an*, sondern *hört* mit derselben *auf*.

Es ist nicht schwer zu entscheiden, welche Methode von beiden sich für die *erste Einführung* in die allgemeine Arithmetik und Algebra am besten eignet; die eigenthümlichen Schwierigkeiten, die

gerade dieser mathematische Zweig dem Anfänger darbietet, der sich bis dahin nur mit der niederen Arithmetik befaßt, sich nur im Operiren mit bestimmten Zahlen geübt hat, können nur durch die letztere gemindert werden.

In dem vorliegenden Lehrbuch, das in diese Disciplin einführen will, sind daher die Grundsätze dieser Methode durchzuführen versucht worden. Zunächst auf das Bedürfniß der bayerischen Seminarien berechnet, setzt es die Kenntniß sämmtlicher Lehren der bestimmten Arithmetik voraus. Unter steter Bezugnahme auf diese, also auf Vorhandenes und Bekanntes, entwickelt es die wichtigsten Sätze der allgemeinen Arithmetik und Algebra, und sucht deren Anwendung an zahlreichen Beispielen zu zeigen und zu erläutern. Die vollständigen Berechnungen dieser letzteren sollen aber auch zugleich sogenannte Musterauflösungen für ähnliche Aufgaben sein, die einer der Sammlungen von M. Hirsch oder Hofmann entnommen werden können. Die meisten dieser Beispiele sind von mir für diesen Zweck gebildet; einige sind auch den soeben genannten Aufgabensammlungen entlehnt, in welchem Falle fast immer die Quelle angegeben ist.

Die in dem Lehrbuch enthaltenen Fragen und Aufgaben dienen verschiedenen Zwecken. Zunächst ist ein Theil derselben dazu bestimmt, die Schüler mit den Buchstaben als allgemeinen Zahlzeichen vertraut zu machen, sie im Operiren mit denselben und in der richtigen Auffassung ihrer gegenseitigen Verknüpfungen, der verschiedenen Zahlformen, zu üben. Ein anderer Theil derselben will sie zur Wiederholung und damit zur Befestigung des Vorhergehenden Lehrstoffs veranlassen und die übrigen endlich sollen ihnen zu einer klaren Uebersicht über das gesammte behandelte Gebiet, zu einer richtigen Einsicht in die gegenseitige Beziehung der einzelnen Lehren verhelfen.

Das Interesse der Schüler für den mathematischen Unterricht wächst mit deren Einsicht in die Nützlichkeit desselben. Auf Aufgaben, die zeigen und durchblicken lassen, daß mit der Mathematik etwas anzufangen ist, lege ich daher ganz besonderen Werth. Die Algebra ist reich an solchen. Namentlich sind es aber die Aufgaben, deren Lösung auf Anwendungen physikalischer und chemischer Gesetze beruht. Durch „die Lectüre dieser Klassiker" wird

nicht nur die mathematische Erkenntniß gefördert, sondern durch dieselbe gewinnen auch die physikalischen und chemischen Anschauungen und Begriffe an Bestimmtheit und Klarheit — ein Umstand, der Seitens derjenigen Mathematiklehrer, in deren Händen sich auch der naturwissenschaftliche Unterricht befindet, die größte Beachtung verdient. Der letzte § enthält ausschließlich Aufgaben dieser Art.

Was den Umfang des Lehrbuchs betrifft, so dürfte der Inhalt desselben in Lehrerseminarien zu bewältigen sein. Lücken, die im Wissen und Können geblieben sind, müssen nach dem Austritt aus diesen Anstalten durch Selbststudium ausgefüllt werden. Ich habe mich ernstlich bemüht, dieses durch das Lehrbuch zu erleichtern. Für Weiterstrebende wird später eine Fortsetzung der vorliegenden Arbeit erscheinen, welche die übrigen wichtigeren Lehren der allgemeinen Arithmetik: Logarithmen, Zinseszins- und Rentenrechnung, arithmetische und geometrische Progressionen, Gleichungen höheren Grades u. s. w. enthalten soll.

Schließlich sei noch bemerkt, daß ich bei der Bearbeitung dieses Lehrbuchs die mathematischen Werke von Egen, Kambly, Funck, Spitz, Helmes und Matthiessen zu Rath gezogen habe. Diese Werke sind zu einem eingehenderen Studium der Mathematik sehr empfehlenswerth.

Altdorf, im Mai 1878.

K. Fuß.

Inhaltsverzeichniß.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Die vier Species in relativen Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Lehre von den Potenzen.

Dritter Abschnitt.

Lehre von den Wurzeln.

Berichtigungen.

Seite 9 letzte Zeile lies 33 statt der letzten Zahl 18.
Seite 37 Zeile 16 von oben lies oder statt odre.
Seite 38 Zeile 3 von unten lies 8 statt 9.
Seite 40 Zeile 1 lies sein statt ein.
Seite 48 setze die Zahl 9408 von Zeile 8 auf Zeile 9 und die Zahl 57624 auf Zeile 8.
Seite 62 zweite Zeile des 6. Beispiels drittletzte Zahl lies 2 statt 3.
Seite 66 letzte Zeile von unten vorletzter Ausdruck fehlt der Nenner 20.
Seite 97 kann die Gleichung 8 vor der Auflösung durch 3 dividirt werden.

Einleitung.

§ 1.

Die bestimmte und allgemeine Arithmetik.

Es ist bekannt, daß zwei Brüche, z. B. $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, oder $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$, mit einander multiplicirt werden, indem man das Product ihrer Zähler durch das Product ihrer Nenner dividirt, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ und $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{6}$. Diese zwei Resultate beziehen sich aber nur auf spezielle Aufgaben und bringen somit den soeben ausgesprochenen Satz, der nicht blos für einzelne Fälle gilt, sondern alle Fälle derselben Art umfaßt, nicht zum Ausdruck. Man sieht also, daß die Ziffern, d. h. die Zeichen für bestimmte Zahlen, allein nicht ausreichen, um allgemeingiltige, von den besonderen Werthen der mit einander zu verbindenden Zahlen ganz unabhängige Sätze auszudrücken. Hiezu hat man außer den Zeichen für bestimmte Zahlen auch noch Symbole für allgemeine (unbestimmte) Zahlen, d. h. Zahlen, bei denen ein besonderer Werth derselben nicht in Betracht kommt, nöthig. Als Zeichen für solche allgemeine Zahlen wendet man **Buchstaben** (in der Regel die des kleinen lateinischen Alphabets) an, die somit den Ziffern, den Zeichen für bestimmte Zahlen, entsprechen. Nur mit Hilfe solcher allgemeiner Zahlzeichen ist es möglich, **Formeln** aufzustellen, d. h. Vorschriften, wie man die Zahlen irgend einer zu lösenden Aufgabe, ohne Rücksicht auf den besonderen Werth dieser Zahlen, mit einander verbinden muß. Der obige Satz über die Multiplication zweier Brüche läßt sich daher, wenn man die beiden Zähler der Brüche durch a und b, und die beiden Nenner derselben durch c und d bezeichnet, folgendermaßen kurz und übersichtlich ausdrücken: $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$. Dieses Resultat $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$ (Formel) lehrt, daß irgend zwei Brüche mit einander multiplicirt werden, indem man das Product ihrer Zähler durch das Product ihrer Nenner dividirt. Selbstverständlich können auch

andere Gesetze des Rechnens, d. h. Gesetze der Zahlenverbindungen, sobald sie von allen Zahlen gelten, in ähnlicher Weise symbolisirt werden. Derjenige Theil der Mathematik nun, der die Gesetze der Zahlenverbindungen als allgemein giltige darstellt und beweist, heißt **allgemeine Arithmetik.** Faßt man das bisher Gesagte und das, was sich unmittelbar aus demselben folgern läßt, kurz und bündig zusammen, so ergiebt sich über das Verhältniß der allgemeinen Arithmetik zur bestimmten Folgendes:

Beide Zweige der Arithmetik stimmen sowohl in ihrem Zweck, der im Allgemeinen darin besteht, aus gegebenen Zahlen durch gesetzmäßige Verbindung derselben andere zu finden, als auch, wenigstens bis zu einer gewissen Grenze, in den Mitteln, den Rechnungsoperationen nämlich, deren sie sich zur Erreichung dieses Zweckes bedienen, überein. Der Unterschied zwischen denselben ist zunächst darin begründet, daß erstere die verschiedenen Rechnungsoperationen an **bestimmten Zahlen,** d. h. Zahlen, welche genau die Menge ihrer Einheiten angeben, vornimmt, während letztere, um die Resultate ihrer Untersuchungen nicht an eine spezielle Form binden zu müssen, statt der bestimmten Zahlen allgemeine Zahlen, zu deren Ausdruck man die **Buchstaben** des kleinen lateinischen Alphabets gewählt hat, gebraucht. In diesem Umstand, nämlich in der Bezeichnung allgemeiner Zahlen durch Buchstaben, ist der Name **„Buchstabenrechnung"** begründet, den man neben dem Namen **„allgemeine Arithmetik"** eingeführt hat. Außer der Symbolisirung allgemeiner Zahlen durch Buchstaben ist es namentlich der Begriff **„entgegengesetzte Zahlen",** welcher den Charakter der allgemeinen Arithmetik bedingt. Hierüber wird der folgende § Näheres bringen.

Ein Buchstabe kann jede beliebige Zahl bedeuten; kommt aber in irgend einer Rechnung ein und derselbe Buchstabe wiederholt vor, so bezeichnet er selbstverständlich jedesmal dieselbe Zahl. Wie man sich unter der bestimmten Zahl drei 3 Wiederholungen der Eins, der Zahleneinheit, zu denken hat, so hat man sich a solcher unter der allgemeinen Zahl a vorzustellen. Die Benennungen „besondere und allgemeine Zahlen", ferner „bestimmte und unbestimmte Zahlen", endlich „Zahlen und Buchstaben" werden in demselben Sinne gebraucht. Buchstaben statt der Zahlen wurden zuerst von Fr. Vièta um die Mitte des 16. Jahrhunderts eingeführt.

Fragen und Aufgaben.

I. Man drücke durch allgemeine Zahlzeichen in Verbindung mit den bekannten Operationszeichen (wenn nöthig unter Anwendung von Klammern) aus:

1) Die Summe, die Differenz, das Product und den Quotienten zweier Zahlen;

2) Die Summe, die Differenz, das Product und den Quotienten zweier Zahlen, durch eine dritte dividirt;

3) Eine Zahl dividirt durch eine Summe, eine Differenz, ein Product und einen Quotienten;

4) Eine Summe dividirt durch eine Summe, eine Differenz und ein Product;

5) Eine Differenz dividirt durch eine Summe, eine Differenz und ein Product;

6) Ein Product dividirt durch eine Summe, eine Differenz und ein Product;

7) Das Product zweier Summen, zweier Differenzen, einer Summe und einer Differenz;

8) Die Summe der halben Summe und halben Differenz zweier Zahlen; die Differenz der halben Summe und halben Differenz zweier Zahlen!

II. Man drücke durch Worte aus:

1) $(a + b) + c$; $(a + b) + (c + d)$;

2) $(a - b) + b$; $(a + b) - b$; $(a + b) - c$; $(a - b) + c$; $(a + b) - (c + d)$; $(a - b) - (c - d)$;

3) $(a + b)m$; $(a - b)m$; $(ab)c$; $(ab)(cd)$; $(a + b)(c + d)$;

4) $\frac{a}{b} \cdot b$; $\frac{ab}{b}$; $\frac{a \pm b}{c}$; $\frac{ab}{c}$; $\frac{a}{b} \cdot c$; $\frac{a}{b} : c$; $\frac{a}{b} \pm c$;

$a : \frac{b}{c}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$!

III. Welche Formeln genügen den Bedingungen folgender Aufgaben:

1) Ein Kaufmann hat an einer Waare A im ersten Jahre a Mark, an einer Waare B aber b Mark gewonnen; im zweiten Jahr hat er an der ersten Waare a' (lies: a eins) Mark, an der zweiten b' Mark gewonnen; im dritten Jahr beziehungsweise a'' und b'' Mark und im vierten Jahr a''' und b''' Mark. Wie viel hat er in jedem Jahre, wie viel an jeder Waare, wie viel im Ganzen gewonnen?

2) Jemand nimmt nach einander a, b, c, d und e Mark ein und giebt hievon f und g Mark aus; wie viel hat er noch?

3) Ein Dampfschiff legt in einer Sekunde vermöge der Kraft seiner Maschine allein m Meter, vermöge der Kraft des Windes allein v Meter, vermöge der Kraft des Stromes allein s Meter zurück. Wie viel Meter legt das Schiff in einer Sekunde zurück; wenn es fährt:

I. mit dem Winde, und zwar
1) mit dem Strome?
2) gegen den Strom?

II. gegen den Wind, und zwar
1) mit dem Strome?
2) gegen den Strom? (Heis.)

4) Zwei Eisenbahnzüge begegnen sich mit den Geschwindigkeiten c und c' Meter in der Sekunde; wie weit sind sie nach einer Sekunde von einander entfernt?

5) Jemand ist c Schritte vorwärts und hierauf d Schritte wieder zurückgegangen; wie weit ist er jetzt vom Anfangspunkt entfernt?

6) Ein Eisenbahnzug legt in jeder Sekunde n Meter zurück; wie viel in einer Minute, in einer Stunde?

7) Die Einheit einer Waare kostet b Mark; was kostet eine Menge q derselben?

8) Die Geschwindigkeit einer Bewegung sei c (celeritas); wie groß ist der in der Zeit t (tempus) zurückgelegte Weg s (spatium)?

9) Wie groß ist die Geschwindigkeit c einer Bewegung, wenn in der Zeit t ein Weg von s Meter zurückgelegt wird?

10) In welcher Zeit t wird der Weg s zurückgelegt bei einer Geschwindigkeit c?

11) q Meter einer Waare kosten p Mark, was kostet die Einheit?

12) Die halbe Summe zweier Zahlen, vermehrt um ihre halbe Differenz, giebt die größere, und um ihre halbe Differenz vermindert, die kleinere der beiden Zahlen.

Anmerkung. Vorstehende Aufgaben haben den Zweck, die Schüler einerseits im richtigen Gebrauch der verschiedenen Rechnungszeichen, andererseits im Operiren mit allgemeinen Zahlen zu üben.

§ 2.

Von der Null und den entgegengesetzten Zahlen.

I. **Begriff der Null.** $4 - 4 = 0$; $12 - 12 = 0$; $a - a = 0$; $x - x = 0$. Hieraus folgt:

Eine Differenz, deren Minuendus gleich dem Subtrahendus ist, heißt **Null** und wird mit 0 bezeichnet.

II. **Entgegengesetzte Zahlen.** Damit dieser Begriff möglichst klar werde, soll zunächst gezeigt werden, was unter entgegengesetzten Größen zu verstehen ist.

1) Hat Jemand, A, kein Geld, so bezeichnet man seinen „Besitz" mit 0 = Nichts. Es ist einleuchtend, daß der Geldbesitzstand anderer Personen, B und C, auf den des A bezogen, nach demselben bestimmt werden kann. Falls B 100 Mark mehr als A, also mehr als Null, hat, so besitzt er 0 + 100 Mark, d. h. 100 Mark Vermögen. Hat C 100 Mark weniger als A, also weniger als Null (ist er 100 Mark zu zahlen schuldig), so hat er 0 — 100 Mark, d. h. 100 Mark Schulden. Man sieht, daß der „Besitz" 0 die gemeinsame Grenze der zwei verschieden benannten Größen, Vermögen und Schulden, ist. Wird Vermögen unter diesen gemeinsamen Null- oder Grenzpunkt vermindert, so geht es in Schulden über. Auch andere Größen gehen durch stetes Abnehmen über eine gewisse Grenze hinaus in ihren Gegensatz über, so Gewinn in Verlust, Ueberfluß in Mangel, Wärme in Kälte, aufwärts in abwärts, rechts in links u. s. w. Bezeichnet man den je 2 dieser Größen gemeinsamen Grenzpunkt mit 0, so ergiebt sich folgende Darstellung des soeben Gesagten:

⟵		⟶
Schulden . . .	0	. . . Vermögen
Verlust . . .	0	. . . Gewinn
Mangel . . .	0	. . . Ueberfluß
Kälte . . .	0	. . . Wärme
abwärts . . .	0	. . . aufwärts
links . . .	0	. . . rechts.

Zwei verschieden benannte Größen, von denen die eine durch stete Verminderung über einen bestimmten Grenzpunkt hinaus in die andere übergeht, heißen in Bezug auf diesen gemeinsamen Nullpunkt **entgegengesetzte Größen.**

Erwägt man, daß die Summe von 30 Mark Vermögen und 20 Mark Schulden = 10 Mark Vermögen, von 40 Mark Einnahme und 60 Mark Ausgabe = 20 Mark Ausgabe ist, so ersieht man:

Entgegengesetzte Größen haben die charakteristische Eigenschaft, daß sie eine Subtraction erfordern, wenn sie in ein Ganzes vereinigt werden sollen.

2) Da nach I. dieses § 4 — 4 = 0 ist, so muß auch 1 — 1 = 0 sein. Hieraus folgt, daß die Null den Anfangspunkt unserer natürlichen Zahlenreihe bildet. Von ihr fängt alle Zahlenbildung an und kann ohne Ende fortgesetzt werden. Es ist aber nicht nöthig, bei der Grenze dieser Zahlenreihe nach unten, der Null, stehen zu bleiben. Wie im Dezimalsystem unter die Einheit hinabgegangen wird, ebenso kann die Reihe der Zahlen von Null abwärts fortgesetzt werden. Man kann mithin von Null an zwei Zahlenreihen nach entgegengesetzten Richtungen bilden und dieselben bis ins Unendliche fortsetzen, also,

$$\longleftarrow \qquad \longrightarrow$$
$$\ldots\ldots 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, \mathbf{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots\ldots$$

Selbstverständlich müssen die Glieder dieser zwei Reihen durch irgend ein Zeichen von einander unterschieden werden. Da man sich die Glieder der Zahlenreihe über Null durch Addition der Einheit, dagegen die Zahlen der Reihe unter Null durch Subtraction der Einheit, durch eine stete Verminderung über Null hinaus, entstanden denken kann, so liegt es nahe, die ersteren durch +, die letzteren durch — zu bezeichnen, also:

$$\longleftarrow \qquad \longrightarrow$$
$$\ldots -5, -4, -3, -2, -1, \mathbf{0}, +1, +2, +3, +4, +5 \ldots$$

Die Zeichen + und —, welche in der bestimmten Arithmetik Operationszeichen sind, dienen somit in der allgemeinen Arithmetik dazu, die verschiedene Lage der Zahlen in Bezug auf Null zu bezeichnen. Deshalb heißen sie in diesem Sinn Beziehungs-, Richtungs- oder Vorzeichen. Um diesen Gegensatz in der Lage der Zahlen in Beziehung auf Null auch in Worten auszudrücken, nennt man die Zahlen der Reihe über Null **positive** oder **additive**, hingegen die der Reihe unter Null **negative** oder **subtractive**. Alle Zahlen, welche auf derselben Seite von Null liegen, welche also mit demselben Vorzeichen versehen sind, heißen **gleichartige** oder **übereinstimmende Zahlen**. Zahlen dagegen, welche auf verschiedenen Seiten von Null liegen, also mit verschiedenen Vorzeichen behaftet sind, nennt man **entgegengesetzte Zahlen**. Beide Arten von Zahlen führen den gemeinschaftlichen Namen **algebraische oder relative Zahlen**, oder **Richtungszahlen**. Zahlen, bei denen eine verschiedene Lage zu Null nicht in Betracht kommt, sondern nur die Menge ihrer Einheiten, ihr absoluter Zahlenwerth, heißen **absolute Zahlen**.

III. **Grund für die Erweiterung der natürlichen Zahlenreihe über Null hinaus.** In der Differenz a — b kann offenbar, da ja jeder Buchstabe jede beliebige bestimmte Zahl repräsentiren kann, der Minuend a größer, so groß oder kleiner als der Subtrahend sein. Es können sich also beispielsweise, wenn man statt a und b bestimmte Zahlenwerthe setzt, folgende Differenzen ergeben, 9 — 4, 9 — 9, 4 — 9. Im ersten Beispiel ist 9 — 4 = 5, im zweiten 9 — 9 = 0. Diese zwei Fälle gehören in das Gebiet der bestimmten Arithmetik. Der dritte Fall liegt außer dem Bereich ihrer Betrachtung; er ist es, der zur Erweiterung des Zahlenbegriffs, wie ihn die bestimmte Arithmetik aufstellt, zwingt. Denn um der Forderung 4 — 9, vom Minuendus 4 nämlich so viele Einheiten abzuzählen, als der Subtrahendus 9 anzeigt, zu genügen, muß man noch 5 unter Null hinabzählen. Es ergiebt sich sonach:

$$4 - 9 = -(9 - 4) = (-5).$$ Ebenso ist

$$a - (a + d) = 0 - d = (-d).$$

Fragen und Aufgaben.

1) Welche Namen der oben angeführten Größen treten an die Stelle des + und — der Zahlen? Welche Größen dieser Beschaffenheit können noch angeführt werden?

2) Welche Uebereinstimmung besteht zwischen entgegengesetzten G r ö ß e n und entgegengesetzten Z a h l e n?

3) Welche Zahl ist kleiner, (— 6) oder (— 12); welche Beziehung findet überhaupt bei einer negativen Zahl zwischen ihrem absoluten (q u a n t i t a t i v e n) und relativen (v o l l s t ä n d i g e n) Werth statt?

4) Uebereinstimmung und Unterschied zwischen allgemeiner und bestimmter Arithmetik!

5) Welchen Vorzug haben beim Rechnen die Buchstaben vor den Zahlen?

Erster Abschnitt.

Die vier Species in relativen Zahlen.

§ 3.

Addition.

I. **Begriff der algebraischen Addition, Sätze über deren Ausführung.**

1.

a) 9 Mark und 6 Mark und 18 Mark Vermögen sind zusammen 33 Mark Vermögen.

b) Symbolisirt, $(+9)+(+6)+(+18)=+(9+6+18)=+33$.

c) Mit Weglassung der Klammern und sämmtlicher Additionszeichen, $9+6+18=33$. (Steht vor einer Zahl kein Richtungszeichen, so ist dieselbe stets als positiv anzusehen).

d) Verallgemeinert, $(+a)+(+b)+(+c)=+(a+b+c)$, oder $a+b+c=(a+b+c)$.

2.

a) 6 Mark und 7 Mark und 10 Mark Schulden sind zusammen 23 Mark Schulden.

b) $(-6)+(-7)+(-10)=-(6+7+10)=-23$.

c) $-6-7-10=-23$.

d) $(-a)+(-b)+(-c)=-(a+b+c)$, oder $-a-b-c=-(a+b+c)$.

3.

a) 9 Mark Vermögen und 6 Mark Schulden, ferner 12 Mark Vermögen und 2 Mark Schulden geben ein Vermögen von 13 Mark.

b) $(+9)+(-6)+(+12)+(-2)=+((9+12)-(6+2))=+(21-8)=+13$.

c) $9 - 6 + 12 - 2 = 13.$

d) $(+a) + (-b) + (+c) + (-d) = +\big((a+c) - (b+d)\big)$, oder $a - b + c - d = \big((a+c) - (b+d)\big)$.

4.

a) 6 Mark Vermögen und 10 Mark Schulden, ferner 5 Mark Vermögen und 12 Mark Schulden geben 11 Mark Schulden.

b) $(+6) + (-10) + (+5) + (-12) = -\big((10+12) - (6+5)\big) = -(22 - 11) = -11.$

c) $6 - 10 + 5 - 12 = -11.$

d) $(+a) + (-b) + (+c) + (-d) = -\big((b+d) - (a+c)\big)$, oder $a - b + c - d = -\big((b+d) - (a+c)\big)$.

Aus diesen Beispielen ergiebt sich Folgendes:

1) **Die algebraische Addition** besteht in der Vereinigung mehrerer entweder gleichartiger oder entgegengesetzter Zahlen (Größen) in eine einzige.

2) **Gleichartige Zahlen** werden vereinigt, indem man der Summe ihrer absoluten Zahlenwerthe das gemeinschaftliche Vorzeichen giebt (1 und 2); **entgegengesetzte Zahlen** addirt man, indem man zunächst alle gleichartigen Zahlen addirt, sodann die kleinere Summe von der größeren subtrahirt und schließlich der entstandenen Differenz das Vorzeichen der größeren Summe giebt (3 und 4).

3) Eine **Klammer** dient dazu, den von ihr umschlossenen Ausdruck als eine einzige Zahl darzustellen. Demnach ist also der Ausdruck:

$(a+b+c)$	im ersten	Beispiel	die	einzige	Zahl	33
$(a+b+c)$	„ zweiten	„	„	„	„	—23
$(a+c)$	„ dritten	„	„	„	„	21
$-(b+d)$	„ „	„	„	„	„	—8
$\big((a+c)-(b+d)\big)$	„ „	„	„	„	„	13
$-(b+d)$	„ vierten	„	„	„	„	—22
$(a+c)$	„ „	„	„	„	„	11
$-\big((b+d)-(a+c)\big)$	„ „	„	„	„	„	—11.

Tritt ein Klammerausdruck als Glied eines andern auf u. s. w., so wendet man folgende Formen an, $[(\,)]$.

4) $9 + 6 + 18 = 33$ (1. Beispiel). Ebenso ist auch $6+9+18$, oder $18 + 9 + 6$, oder $18 + 6 + 9 = 18$. Hieraus folgt:

Es ist gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man die einzelnen Glieder addirt.

II. **Coëfficient.** Statt 18 + 18 kann man auch 2 · 18, statt 18 + 18 + 18 = 3 · 18, statt 18 + 18 + 18 + 18 = 4 · 18, statt 18 + 18 + 18 + 18 + 18 — 18 — 18 = 5 · 18 — 2 · 18 = (5 — 2)18 = 3 · 18 schreiben. Ebenso statt a + a = 2a, statt a + a + a = 3a, statt a + a + a + a = 4a, statt a + a + a + a + a — a — a — a = 5a — 3a = (5 — 3)a = 2a. Die Zahl 2, oder 3, oder 4, oder 5 vor dem Buchstaben a nennt man den Coëfficienten desselben.

Unter dem **Coefficienten** einer Buchstabengröße versteht man die vor derselben stehende, meist bestimmte Zahl, welche angiebt, wie oft der Buchstabe oder die Buchstaben, welche man zusammen auch die **Hauptgröße** nennt, als Summand vorhanden sind; demnach bedeutet 5ab = ab + ab + ab + ab + ab. Zwei oder mehrere Glieder heißen **gleichnamige,** wenn sie dieselbe Hauptgröße haben, also 3ax — 5ax.

III. **Algebraische Addition solcher Buchstabengrößen, die Coefficienten haben.** 3a bedeutet, wie soeben gezeigt wurde, a+a+a und 2a = a + a; mithin ist 3a + 2a = a + a + a + a + a = 5a. Man kann auch so schließen, 3a + 2a bedeutet, es soll zum 3fachen einer Zahl ihr 2faches addirt werden, was das fünffache derselben giebt. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Gleichnamige Buchstabengrößen werden addirt, indem man ihre Coefficienten addirt. Die Addition ungleichnamiger Buchstabengrößen kann nur angedeutet werden. Mithin ist unter Berücksichtigung von I, 2 dieses §,

1) 6a + 8a + 10a + 15a + 7a = 46a
2) — 4d — 8d — 10d — 9d = — 31d
3) 5d — 8d + 20d — d = 16d
4) 6d — 19d + d — 10d = — 22d
5) 5a + 3b + 2c + 6d = (5a + 3b + 2c + 6d)
6) 6a — 7b + 8c — 11d = ((6a + 8c) — (7b + 11d))

u. s. w.

IV. **Polynom.** 6 · 7 — 3 · 4 + 5 · 6 = 60. Bezeichnet man 7 durch a, 4 durch b und 6 durch c, so erhält man für die Zahl 60 olgenden Ausdruck, (6a — 3b + 5c), der aus 3 Gliedern besteht, die, so lange nicht für a, b und c die bestimmten Zahlenwerthe 7, 4

und 6 gesetzt werden, nicht in ein einziges Glied (in die Zahl 60) zusammengefaßt werden können.

Eine Zusammenstellung von positiven und negativen Zahlen (durch algebraische Addition) heißt ein **Aggregat,** ein **Polynom,** eine zusammengesetzte oder vielgliedrige Größe. Dem Ausdruck (6a — 3b + 5c) kommen demnach diese verschiedenen Namen zu. Die einzelnen positiven oder negativen Zahlen heißen die **Glieder** des Polynoms. Jedes Glied für sich führt den Namen **Monom,** die Verbindung von 2 Gliedern **Binom,** von 3 **Trinom.** Mehrere Polynome, z. B. (4a — 4b + 5c) und (6a + 8b — 6c) und (— 9a + 13b — 15c), werden addirt, indem man zunächst die gleichnamigen Glieder unter einander setzt und sie dann durch Vereinigung der Coefficienten zusammenfaßt, also:

$$\begin{array}{rrr} 4a & -\ 4b & +\ 5c \\ 6a & +\ 8b & -\ 6c \\ -\ 9a & +\ 13b & -\ 15c \\ \hline =\ a & +\ 17b & -\ 16c. \end{array}$$

Zur weiteren Uebung können die Beispiele in der Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von M. Hirsch unter § II, a und b, Addition einfacher und zusammengesetzter Größen, dienen.

§ 4.

Subtraction.

I. Begriff der algebraischen Subtraction, Sätze über deren Ausführung.

1.

a) Statt Jemandem, der 100 Mark habe, 50 Mark Vermögen zu nehmen (von seinem Besitze zu **subtrahiren**), kann man ihm 50 Mark Schulden (die Verpflichtung so viel zu bezahlen) geben (zu seinem Besitze **addiren**); er behält alsdann noch 50 Mark Vermögen.

b) Symbolisirt, (+100) — (+50) = (+100) + (—50) = + 50; oder einfacher, 100 — (+ 50) = 100 — 50 = 50.

c) Verallgemeinert, (+a) — (+b) = (+a) + (b) = + (a — b) = (a — b); einfacher, a — (+ b) = a — b.

2.

a) Statt Jemandem, der 150 Mark Vermögen und 50 Mark Schulden, eigentlich also nur 100 Mark Vermögen besitzt, 50 Mark **Schulden** abzunehmen (**abzuziehen**), kann man ihm 50 Mark **Vermögen** (um damit die Schulden selber zu zahlen) geben (zu seinem Besitze **addiren**); er hat alsdann 150 Mark Vermögen.

b) $(+\ 100) - (-\ 50) = (+\ 100) + (+\ 50) = 150$, einfacher, $100 - (-\ 50) = 100 + 50 = 150$.

c) $(+\ a) - (-\ b) = (+\ a) + (+\ b) = +(a + b) = (a + b)$; einfacher, $a - (-\ b) = a + (+\ b) = a + b$. Diese Beispiele lehren:

1) Algebraisch **subtrahiren** heißt, das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addiren.

2) Man **führt** demnach die algebraische Subtraction **aus**, indem man das Vorzeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte verwandelt und ihn dann zum Minuendus addirt. Es ist also:

1.

a) $(+\ 70) - (+\ 30) = 70 - 30 = 40$
b) $(+\ a) - (+\ b) = a - b = (a - b)$
c) $(+\ 9a) - (+\ 4a) = 9a - 4a = 5a.$

2.

a) $(+\ 60) - (-\ 30) = 60 + 30 = 90$
b) $(+\ a) - (-\ b) = a + b = (a + b)$
c) $(12a) - (-\ 6a) = 12a + 6a = 18a.$

3.

a) $(-\ 4) - (+\ 1) = -\ 4 - 1 = -\ 5$
b) $(-a) - (+\ b) = -a - b = -(a + b)$
c) $(-13a) - (+\ 14a) = -13a - 14a = -27a.$

4.

a) $(-\ 9) - (-\ 8) = -\ 9 + 8 = -\ 1$
b) $(-a) - (-\ b) = -a + b = +(b - a)$
c) $(-15a) - (-\ 6a) = -15a + 6a = -9a.$

3) Da nach dem Vorhergehenden die Differenz $a - b$ als eine algebraische Summe, nämlich als $(+\ a) + (-\ b)$ aufgefaßt werden kann, so folgt, daß jeder gemischtgliederige Ausdruck, jedes Aggregat, wie beispielsweise $a - b - c + d - e$, als eine

Summe algebraischer Zahlen, nämlich als $(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (-e)$ anzusehen ist, in welcher die subtractiven Glieder negative und die additiven Glieder positive Summanden sind. Die Additionszeichen werden, da hiedurch das Verständniß der Aufgabe nicht im mindesten erschwert wird, fortgelassen. Hiernach ist:

$$30 - 4 - 8 + 2 - 3 - 5 = (+30) + (-4) + (-8) + (+2) + (-3) + (-5) = 12,$$ oder

$$3a - 5a - 6a - 9a = (3a) + (-5a) + (-6a) + (-9a) = -17a.$$

In diesem Umstand ist der Name **algebraische Summe** begründet, den man neben dem Namen Aggregat, Polynom gebraucht. (Man vergleiche die veranschaulichenden Beispiele in § 3, I).

II. Regeln über die Auflösung der Klammern.

1.

a) $10+4 = 10+(3+4-5+2) = 10+3+4-5+2 = 14$

b) $a + (b + c - d + e) = a + b + c - d + e.$

2.

a) $20-4 = 20-(3+4-5+2) = 20-3-4+5-2 = 16$

b) $a - (b + c - d + e) = a - b - c + d - e.$

3.

a) $20-(3-(4+5)-6-(9+8)) = 20-(3-4-5-6-9-8) = 20-3+4+5+6+9+8 = 49.$

b) $a-(b-(c+d)-e-(f+g)) = a-(b-c-d-e-f-g) = a-b+c+d+e+f+g.$ Aus diesen Beispielen leiten wir ab:

1) **Klammern auflösen** oder **wegschaffen** heißt, einen Zahlenausdruck, in dem dieselben vorkommen, so umformen, daß er ohne Klammern erscheint (die angezeigten Operationen ausführen).

2) Steht vor einer Klammer ein + Zeichen, so kann sie ohne weiteres weggelassen werden (1).

3) Steht vor einer Klammer ein − Zeichen, so läßt man dieselbe sammt dem − weg und giebt den Gliedern in der Klammer die entgegengesetzten Vorzeichen (2) Grund!

4) Kommen in einer Klammer neue Klammern vor, so löst man zuerst die inneren und dann die äußeren auf (3).

5) Sollen Glieder in eine Klammer gebracht werden, vor welcher ein — steht, so muß man vorher die Zeichen dieser Glieder in die entgegengesetzten verwandeln (Umkehrung von 2).

Uebungsmaterial zu diesem §. findet sich in M. Hirsch unter §. III, a und b, Subtraction einfacher und zusammengesetzter Größen, oder in der Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra von Fr. Hofmann, II. Theil, Addition und Subtraction. Sind Aufgaben folgender Art zu lösen, 4a — 5b + 6c — 8d weniger — 5a + 8b — 5c + 10d, so kann man folgende Anordnung treffen:

$$\begin{array}{rrrr} 4a & -\ 5b & +\ 6c & -\ 8d \\ -\ 5a & +\ 8b & -\ 5c & +\ 10d \\ + & - & + & - \\ \hline 9a & -13b & +\ 11c & -\ 18d \end{array}$$

Auch folgende **Beispiele** können zur Uebung dienen:

1) 16a + (3b—2c) — (7a + (2b — 5c) — (9b + 8c)) = ?
2) (5a - 6b - (3a - 2b)) — ((2a — 7b) + (2b — 9a) — 10a) = ?
3) — [4c + (12a — (3b — 2c) — (11b + 7a) — 10c)] = ?
4) 3a — [((2b — c) — 5a) — 4c — (2c — 6b) + (3a — 5b)] = ?

§ 5.

Multiplication.

I. **Begriff der algebraischen Multiplication.** In der Aufgabe 5. 4 zeigt der Multiplicator 4 an, daß der Multiplicand 5 viermal nämlich 1 mal, + 1 mal, + 1 mal, + 1 mal genommen werden soll. Da nun der Multiplicator 4 aus der Einheit, der Eins, dadurch entsteht, daß man dieselbe 4mal nimmt, so sagt die Aufgabe 5. 4 mithin aus, man soll aus dem Multiplicandus 5 eine neue Zahl so entstehen lassen, wie der Multiplicator 4 aus der Einheit entsteht. Dasselbe wird auch in folgendem Beispiel $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}$ = ? gefordert. Der Multiplicator $\frac{3}{5}$ entsteht aus der Einheit dadurch, daß man den 5. Theil von derselben 3mal nimmt. Verfährt man nun mit dem Multiplicandus $\frac{4}{7}$ ebenso, d. h., nimmt man auch von ihm den 5. Theil 3mal, so erhält man das richtige Product, nämlich $\frac{12}{35}$. Auch in dem Beispiel 4 · — 7 liegt dieselbe Forderung vor, die Forderung nämlich, lasse aus dem Multiplicand 4 eine neue Zahl so entstehen, wie der Multiplicator — 7 aus der Einheit, nämlich + 1, entsteht. Wie entsteht nun aber derselbe aus ihr? Offenbar dadurch, daß man dieselbe in ihren Gegensatz, die negative Einheit, (—1), verwandelt und sie dann 7mal wiederholt. Verfährt man nun ebenso mit dem Multi-

plicand 4, verwandelt man ihn nämlich in seinen Gegensatz und nimmt ihn dann 7mal, so erhält man —28, also ist 4 · —7 = —28. Aus dieser Entwickelung ergiebt sich für die (algebraische) Multiplication folgende Erklärung:

(Algebraisch) **multipliciren** heißt, aus einer gegebenen Zahl, dem **Multiplicandus**, eine neue Zahl, das **Product**, so entstehen lassen, wie eine zweite gegebene Zahl, der **Multiplicator**, aus der positiven Einheit entsteht (Factoren).

II. Sätze über die Multiplication.

1.

a) $(+4)\cdot(+5) = +(4\cdot5) = +20$, allgemein, $(+a)\cdot(+b) = +(a\cdot b)$;
b) $(+4)\cdot(-5) = -(4\cdot5) = -20$ „ $(+a)\cdot(-b) = -(a\cdot b)$;
c) $(-4)(+5) = -(4\cdot5) = -20$ „ $(-a)\cdot(+b) = -(a.b)$;
d) $(-4)\cdot(-5) = +(4\cdot5) = +20$ „ $(-a)\cdot(-b) = +(a.b)$.

Die Richtigkeit dieser Gleichungen folgt aus der obigen Erklärung über das Wesen der algebraischen Multiplication. Soll z. B., um nur die Richtigkeit des Satzes d nachzuweisen, (— 4) mit (— 5) multiplicirt werden, so hat man, obiger Erklärung zu Folge, aus dem Multiplicand (— 4) das Product so entstehen zu lassen, wie der Multiplicator (— 5) aus der positiven Einheit entsteht. Da nun (— 5) aus (+ 1) dadurch entsteht, daß man die positive Einheit in ihren Gegensatz verwandelt und hierauf (— 1) fünfmal wiederholt, so muß auch der Multiplicand (— 4) zuerst in seinen Gegensatz verwandelt und 5 mal wiederholt werden, was (+ 20) giebt, also, (— 4). (— 5) = + 20. In Worte gefaßt, heißen diese 4 Sätze:

Zwei positive Zahlen, mit einander multiplicirt, geben ein positives Product; eine positive Zahl, mit einer negativen multiplicirt, giebt ein negatives Product, eine negative Zahl, mit einer positiven multiplicirt, gibt ein negatives Product; eine negative Zahl, mit einer negativen multiplicirt, giebt ein positives Product. Man pflegt diese 4 Sätze in folgende Regel zusammenzufassen: **Gleiche Zeichen der Factoren geben für das Product das Zeichen +, ungleiche Zeichen geben** —, oder noch kürzer, gleiche Vorzeichen geben plus (+), ungleiche geben minus (—).

2.

a) $(+2)\cdot(+3)\cdot(+4)\cdot(+5) = +(2.3.4.5) = 120$,
$(+a)\cdot(+b)\cdot(+c)\cdot(+d) = +(abcd)$

b) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) . (-5) = + (2. 3. 4. 5) = 120,$
$(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d) = + (abcd)$

c) $(+2) \cdot (+3) \cdot (+4) = + (2 \cdot 3 \cdot 4) = 24, (+a) \cdot (+b) \cdot (+c) = + (abc);$

d) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = - (2 \cdot 3 \cdot 4) = -24, (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) = - (abc).$

Diese Beispiele lehren:

Eine gerade Anzahl sowohl positiver als negativer Factoren giebt ein positives Product (a und b), eine ungerade Anzahl positiver Factoren giebt ein positives, eine ungerade Anzahl negativer Factoren ein negatives Product (c und d).

3.

a) $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 20, a \cdot b = b \cdot a$

b) $4 \cdot 5 \cdot 6 = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120,$
$a \cdot b \cdot c \cdot d = bacd = cabd = dabc = cdba = abcd.$

Die Reihenfolge der Factoren eines Products ist beliebig (Man vergleiche § 3, I, 4).

4.

a) $(5 \cdot 4) \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot 4 = 5 (4 \cdot 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60,$

b) $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a (b . c) = abc$

Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man einen seiner Factoren mit dieser Zahl multiplicirt.

5.

a) $(3 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5) = 6 \cdot (4 \cdot 5) = 6 \cdot 20 = 120$

b) $3a \cdot 2b = 6ab$, oder $\frac{5}{9}cd \cdot - \frac{6}{7}ef = - \frac{10}{21}$ cdef.

Monome werden mit einander multiplicirt, indem man dem Product ihrer Coefficienten das der Hauptgrößen als Factor hinzufügt.

6.

a) $7 \cdot 32 = 7 \cdot (30 + 2) = 7 \cdot 30 + 7 . 2 = 224.$

b) $a (b + c) = ab + ac.$

c) $6 \cdot 788 = 6 . (790 - 2) = 6. 790 - 6 . 2 = 4740 - 12 = 4728.$

d) $a (b - c) = ab - ac.$

e) $5 \cdot 560 = 5 \cdot (550 + 5 + 2 + 3) = 5. 550 + 5. 5 + 5. 2 + 5. 3 = 2750 + 25 + 10 + 15 = 2800.$

f) $a (b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae.$

g) $4 \cdot 730 = 4 . (740 - 5 - 2 - 3) = 4 . 740 - 4 . 5 - 4 . 2 - 4 . 3 = 2960 - 20 - 8 - 12 = 2920.$

h) $a(b - c - d - e) = ab - ac - ad - ae$.

i) $3a\,(4b - 5c + 7d - 9e) = 12ab - 15ac + 21ad - 27ae$.

Die Richtigkeit des Verfahrens in den vorstehenden Beispielen kann auch auf folgende Weise erwiesen werden: Die Glieder eines Polynoms sind als die Theile desselben zu betrachten; soll eine Zahl mit einem Ganzen multiplicirt werden, so muß man sie mit allen seinen Theilen multipliciren. Man sieht also:

Ein Polynom multiplicirt man mit einem Monom, indem man alle Glieder desselben mit dem Monom multiplicirt und die Theilproducte addirt.

7.

a) $30\,.\,40 = (20 + 10)\,(35 + 5) = 20\,.\,35 + 20\,.\,5 + 10\,.\,35 + 10\,.\,5 = 700 + 100 + 350 + 50 = 1200$.

b) $(3a + 4b)\,(5c + 6d) = 15ac + 18ad + 20bc + 24bd$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens kann auch dadurch nachgewiesen werden, daß man statt des einen Polynoms, etwa statt des ersten, eine Zahl setzt, etwa p, diese mit dem andern Polynom, wie im vorigen Satz gezeigt wurde, multiplicirt und sodann statt p den Werth desselben einsetzt, also, $(3a + 4b)\,(5c + 6d) = p(5c + 6d) = 5cp + 6dp$. Setzt man nun statt p den Werth $(3a + 4b)$ ein, so ergiebt sich, $5c(3a + 4b) + 6d(3a + 4b) = 15ac + 20bc + 18ad + 24bd$, oder $15ac + 18ad + 20bc + 24bd$. Diese Beispiele lehren:

Ein Polynom wird mit einem Polynom multiplicirt, indem man jedes Glied des einen Polynoms mit jedem des andern multiplicirt und die Theilproducte addirt.

8.

$(3a + 4b)0 = (3a + 4b)\,(5 - 5)$ (§ 2, 1) $= 15a - 15a + 20b - 20b = 0$.

Ist einer der Factoren Null, so ist auch das Product Null.

III. **Form für die Multiplication zweier Aggregate.**

Bei der practischen Ausführung der Multiplication schreibt man zweckmäßig die Factoren unter einander und setzt auch die zusammenziehbaren Glieder unter einander, also:

$$(3a - 4b + 5c)\,(-6a + 9b - 11c) = ?$$

Ausrechnung.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
3a & -4b & +5c & & & \\
-6a & +9b & -11c & & & \\
\hline
-18aa & +24ab & -30ac & & & \\
 & +27ab & & -36bb & +45bc & \\
 & & -33ac & & +44bc & -55cc \\
\hline
=-18aa & +51ab & -63ac & -36bb & +89bc & -55cc.
\end{array}
$$

Zur weiteren Uebung können die Beispiele in „M. Hirsch" oder „Hofmann", Multiplication einfacher und zusammengesetzter Größen, benützt werden.

§ 6.

Division.

I. **Begriff der Division.** 4 Mark sind in 24 Mark 6mal enthalten; 6mal 4 Mark sind 24 Mark. Der 4. Theil von 24 Mark ist 6 Mark; 4mal 6 Mark sind 24 Mark. Aus diesen Beispielen folgt die Erklärung der algebraischen Division, nämlich:

Dividiren heißt, aus zwei gegebenen Zahlen, dem **Dividendus,** und dem **Divisor,** eine dritte, den **Quotienten,** finden, welche, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus giebt.

II. **Sätze über die Division.**

1.

a) $(+24):(+4)=+6$; denn $(+6).(+4)=+(6.4)=+24$;

$(+a):(+b)=+\frac{a}{b}$; „ $\left(+\frac{a}{b}\right).(+b)=+a.$

b) $(+24):(-4)=-6$; „ $(-6).(-4)=+(6.4)=+24$;

$(+a):(-b)=-\frac{a}{b}$; „ $\left(-\frac{a}{b}\right).(-b)=+a.$

c) $(-24):(+4)=-6$; „ $(-6).(+4)=-(6.4)=-24$;

$(-a):(+b)=-\frac{a}{b}$; „ $\left(-\frac{a}{b}\right).(+b)=-a.$

d) $(-24):(-4)=+6$; „ $(+6).(-4)=-(6.4)=-24$;

$(-a):(-b)=+\frac{a}{b}$; „ $\left(+\frac{a}{b}\right).(-b)=-a.$ In diesen Beispielen sind folgende Sätze enthalten:

Der Quotient zweier positiver Zahlen ist positiv (1, a); der Quotient aus einer positiven und einer negativen Zahl ist negativ (1, b und c); der Quotient zweier negativer Zahlen ist positiv (1, d). Man pflegt diese Sätze in die Regel zusammenzufassen: **Gleiche Zeichen (des Dividendus und des Divisors) geben (für den Quotienten) das Vorzeichen plus, +, ungleiche Zeichen geben minus, —.**

2.

$\frac{+24}{+4} = +6$, ebenso ist $\frac{-24}{-4} = +6$; ferner ist $\frac{+24}{-4} = -6$, ebenso ist $\frac{-24}{+4} = -6$; $\frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$.

Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man in Dividendus und Divisor die Vorzeichen umkehrt.

3.

$$(-12ab) : (+3cd) = -\frac{12ab}{3cd} = -4\frac{ab}{cd}.$$

Zwei Monome werden durch einander dividirt, indem man zunächst die Coefficienten für sich dividirt, sodann die Hauptgrößen und beide Quotienten als Factoren neben einander setzt.

4.

$$\frac{27}{9} = \frac{30 + 4 - 5 - 2}{9} = \frac{30}{9} + \frac{4}{9} - \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = 3;$$

$(7a + 5b - 4c) : 9d = \frac{7a}{9d} + \frac{5b}{9d} - \frac{4c}{9d}$. Diese Beispiele lehren:

Ein Polynom wird durch ein Monom dividirt, indem man jedes einzelne Glied desselben durch das Monom dividirt. (Man vergleiche § 5, II, 6).

5.

Hat man etwa mit 345 in 5865 zu dividiren, so sagt man bekanntlich, 345 liegt in 586 so oft als 3 in 5 u. s. w., man dividirt also mit dem ersten Glied des Divisors in das erste Glied des Dividendus, multiplicirt den ersten Theil des erhaltenen Quotienten mit dem ganzen Divisor, subtrahirt das erhaltene Product vom Dividendus, setzt die nächste Klasse herunter u. s. w. In ganz ähnlicher Weise verfährt

man bei der Division zweier Aggregate. Das nachfolgende Beispiel soll dieses Verfahren klar machen. Ist die Aufgabe $(-18aa+51ab-63ac-36bb+89bc-55cc):(3a-4b+5c)$ gegeben, so findet zweckmäßig folgende Anordnung statt:

Divisor Dividend Quotient

$$\begin{array}{l|l}
3a-4b+5c & -18aa+51ab-63ac-36bb+89bc-55cc=-6a+9b-11c \\
 & -18aa+24ab-30ac \\
 & \;\;+\quad\;\; -\quad\;\; + \\
\hline
 & \qquad\qquad 27ab-33ac-36bb+89bc \\
 & \qquad\qquad 27ab\qquad\;\; -36bb+45bc \\
 & \qquad\qquad -\qquad\qquad +\qquad - \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad -33ac\qquad +44bc-55cc \\
 & \qquad\qquad\qquad -33ac\qquad +44bc-55cc \\
 & \qquad\qquad\qquad +\qquad\qquad -\qquad + \\
\hline
\end{array}$$

Aggregate werden also durch einander dividirt, indem man sie zunächst nach demselben Gesetz ordnet, sodann das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors dividirt, den erhaltenen Quotienten mit dem ganzen Divisor multiplicirt und das Product subtrahirt. Zu dem geordneten Rest schreibt man das nächste Glied (oder alle Glieder) herunter und dividirt wieder das erste Glied desselben durch das erste Glied des Divisors u. s. f. Dieses Verfahren setzt man solange fort, bis die Division aufgeht. Ist dies nicht der Fall, so fügt man den Rest als Zähler eines Bruches, dessen Nenner der Divisor ist, dem erhaltenen Quotienten als Posten bei, oder setzt die Division fort, z. B.

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{1-b} = 1-b\,|\,1 = 1+b+bb+bbb\ldots \\
\qquad\qquad\quad 1-b \\
\qquad\qquad\;\; -\;\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\;\; b \\
\qquad\qquad\qquad\;\; b-bb \\
\qquad\qquad\qquad\; -\;\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; bb \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; bb-bbb \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; -\;\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; bbb.
\end{array}$$

Zusatz.

Die Addition, Subtraction und Multiplication ganzer Zahlen führt immer zu ganzen Zahlen, nicht aber ihre Division. 12 : 4 = 3, aber 12 : 7 = $\frac{12}{7}$. Alle diejenigen Quotienten, deren Werth nicht in ganzen Zahlen angebbar ist, heißen **gebrochene Zahlen** oder **eigentliche Brüche**, also $\frac{12}{7}$, $\frac{8}{9}$; alle anderen Quotienten dagegen, nämlich diejenigen, deren Divisor genau ein oder mehreremal im Dividendus enthalten (ein **aliquoter** Theil desselben) ist, nennt man **uneigentliche Brüche**, z. B. $\frac{24}{8}$, $\frac{30}{10}$, $\frac{ab}{b}$. Jeder Quotient kann somit als Bruch betrachtet werden; der Dividend wird alsdann Zähler und der Divisor Nenner genannt. a : b und $\frac{a}{b}$ sind also identische Ausdrücke. Durch Vertauschung des Zählers und Nenners eines Bruches erhält man den **reciproken Werth** desselben, so sind $\frac{4}{7}$ und $\frac{r}{p}$ die reciproken Werthe von $\frac{7}{4}$ und $\frac{p}{r}$.

Kommen in einem Ausdruck verschiedene Rechnungsoperationen vor, so merke man sich, **daß Multiplication und Division der Addition und Subtraction stets vorangehen.**

Aufgaben zur Befestigung und Einprägung des Vorhergehenden finden sich in „M. Hirsch" unter § 5, a und b, Division einfacher und zusammengesetzter Ausdrücke, sowie in „Hofmann", 2. Theil, 1. Abschnitt, II, III und VI. Drei Aufgaben aus diesen Sammlungen sollen hier noch ihre Lösung finden.

1. Beispiel.

$$[(156-6.-3-(21-30:2)):21-3(4-84:(7-28)-1)+19]:6+11=$$
$$[(156-6.-3-6):21-3(4-84:-21-1)+19]:6+11=$$
$$[168:21-3.7+19]:6+11=$$
$$6:6+11=$$
$$\mathbf{12.}$$

2. Beispiel.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{fd}{2c}-3ac+7\right):\frac{3c}{d}=\frac{ad}{3bc}+\frac{fdd}{6cc}-ad+\frac{7d}{3c}.$$

3. Beispiel.

$$\left(\frac{9aabb}{4cc} - \frac{25ffmm}{gg} + \frac{70dfm}{g} - 49dd\right) : \left(\frac{3ab}{2c} + \frac{5fm}{g} - 7d\right) = ?$$

$$\frac{3ab}{2c} + \frac{5fm}{g} - 7d \;\Big|\; \frac{9aabb}{4cc} - \frac{25ffmm}{gg} + \frac{70dfm}{g} - 49dd \;\Big|= \mathbf{\frac{3ab}{2c} - \frac{5fm}{g} + 7d}$$

$$\frac{9aabb}{4cc} + \frac{15abfm}{2cg} - \frac{21abd}{2c}$$

$$- \quad - \quad +$$

$$- \frac{15abfm}{2cg} + \frac{21abd}{2c} - \frac{25ffmm}{gg} + \frac{70dfm}{g}$$

$$- \frac{15abfm}{2cg} \qquad - \frac{25ffmm}{gg} + \frac{35dfm}{g}$$

$$+ \qquad + \quad -$$

$$\frac{21abd}{2c} + \frac{35dfm}{g} - 49dd$$

$$\frac{21abd}{2c} + \frac{35dfm}{g} - 49dd$$

$$- \quad - \quad +$$

Fragen und Aufgaben.

1) Was versteht man unter algebraischer Addition? Welche Fälle können bei derselben vorkommen und nach welchen Regeln werden sie behandelt?

2) Welchen Zweck haben Klammern? Wie verschieden sind dieselben nach Form und Vorzeichen? Was heißt „Klammern auflösen“? Nach welchen Regeln wird diese Operation vollzogen?

3) Was ist ein Aggregat? Welche Namen führt es noch und aus welchem Grund wird es auch algebraische Summe genannt?

4) Man erkläre folgende Ausdrücke: Coefficient, Monom, Binom und Trinom?

5) Worin besteht das Wesen der algebraischen Subtraction? Welche Fälle sind bei derselben möglich und nach welcher Regel werden sie behandelt?

6) Welcher wesentliche Unterschied findet zwischen der Addition und Subtraction der allgemeinen Arithmetik und der Addition und Subtraction in der bestimmten Arithmetik statt?

7) In welchem inneren Zusammenhang stehen Addition und Subtraction?

8) Welche Operation von beiden kann in der allgemeinen Arithmetik ganz ausfallen? Durch welche ist sie zu ersetzen und auf welche Weise? (Nachweis an Beispielen.)

9) Was heißt *algebraisch multipliciren*? Welche Fälle sind bei dieser Operation bezüglich der Vorzeichen der beiden Factoren möglich? Welche Regeln sind bei denselben zu beachten?

10) Sind die einzelnen Producte ab, abc, abcd u. s. w. Polynome oder Monome? Was sind in dieser Beziehung die Ausdrücke $(a+b)$, $(a-b)$, $(a+b+c+d)$, $(a-b-c-d)$?

11) Welche Fälle kommen bei der algebraischen Multiplication bezüglich der Form der Factoren in Betracht? Wie ist in jedem Fall zu verfahren?

12) Was heißt *dividiren*? Welche Fälle können bei der Division in Bezug auf die Vorzeichen des Divisors und des Dividendus vorkommen? Welche Regel hat sich für dieselben ergeben?

13) In welcher Form können Divisor und Dividendus auftreten? Wie wird in jedem einzelnen Fall die Division ausgeführt?

14) Besteht zwischen Quotient und Bruch ein Unterschied oder nicht?

15) 80^0 Réaumur (R) $= 100^0$ Celsius (C) $= 180^0 + 32$ Fahrenheit (F). Bezeichnen n^0R, n^0C, n^0F eine gewisse Anzahl Grade nach den betreffenden Thermometer-Scalen, so ergeben sich folgende Formeln für die Verwandlung einer Thermometer-Angabe in die beiden andern:

$$\text{I} \quad n^0R = \tfrac{5}{4}n^0C = (\tfrac{9}{4}n + 32)^0F$$

$$\text{II} \quad n^0C = \tfrac{4}{5}n^0R = (\tfrac{9}{5}n + 32)^0F$$

$$\text{III} \quad n^0F = \tfrac{4}{9}(n - 32)^0R = \tfrac{5}{9}(n - 32)^0C.$$

Es können nun folgende Aufgaben gelöst werden. Wie viel Grad R und C sind 59, 50, 32, 23, 5, 0, —4, —13 Grad F? Oder, wie viel Grad F sind —20, —16, —12, —4, +12 Grad R? Oder, wie viel Grad F sind —25, —20, —15, —5, 0, 10 Grad C?

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Potenzen.

§ 7.

Die Potenzen im Allgemeinen.

Das Product 5 . 5, das aus zwei gleichen Factoren besteht, kann auch so geschrieben werden, daß man den gleichen Factor 5 nur einmal setzt und außerdem durch eine rechts oben angefügte 2 andeutet, daß er zweimal zu nehmen ist, also, 5^2 (lies 5 hoch 2). Ebenso kann man statt $5 . 5 . 5 = 5^3$, statt $5 . 5 . 5 . 5 = 5^4$, statt $a . a . a . a . a = a^5$ schreiben. Hiernach bedeutet also 6^3 so viel als 6.6.6, $8^4 = 8.8.8.8$, $b^5 = b . b . b . b . b$ und der Ausdruck a^n steht für ein Product von n gleichen Factoren, deren jeder $= a$ ist. Einen Ausdruck von der Form a^n nennt man eine Potenz und liest ihn: a hoch n, oder a zur nten Potenz, oder a zur nten.

Unter einer **Potenz** versteht man ein Product, das aus zwei oder mehreren gleichen Factoren besteht. Der zwei oder mehreremal zu wiederholende Factor heißt **Grundzahl, Basis** oder **Dignand** und die rechts oben beigefügte Zahl, welche angiebt, wie viel mal die Basis als Factor zu nehmen ist, der **Exponent** der Potenz. Eine Zahl potenziren, sie in eine Potenz erheben, heißt, sie so oft mal als Factor setzen, als der Exponent Einheiten hat. Wird eine Zahl zweimal als Factor gesetzt, so sagt man, sie werde ins Quadrat erhoben, sie werde quadrirt, also 2^2, a^2 (l. a Quadrat). Eine Zahl kubiren, sie in den Kubus erheben heißt, sie dreimal als Factor setzen, also 2^3, a^3 (l. a Kubus). Setzt man eine Zahl viermal als Factor, so erhebt man sie damit ins Biquadrat, also 2^4, a^4, (l. a Biquadrat). Die zweite, dritte und vierte Potenz einer Zahl heißt also bezüglich **Quadrat, Kubus, Biquadrat.**

Aufgabe. Man merke sich die Quadrate der Zahlen von 1—20 und die Kuben von 1—10!

§ 8.

Addition und Subtraction von Potenzen.

I. **Verschiedenheit mehrerer Potenzen unter sich.** Die Potenzen $6a^4$ und $9a^4$ stimmen in Basis und Exponent überein; zwischen den Potenzen $6a^4$ und $9a^5$ besteht nur bezüglich der Basis Uebereinstimmung; die Potenzen $6a^4$ und $9b^4$ unterscheiden sich von einander in der Basis, im Exponenten stimmen sie mit einander überein; zwischen den Potenzen $11c^4$ und $14d^6$ findet endlich sowohl in der Basis, als im Exponent Verschiedenheit statt. Also:

Zwischen zwei oder mehreren Potenzen kann eine vierfache Beschaffenheit bestehen. Sie können nämlich:

1) sowohl in Basis als Exponent Uebereinstimmung zeigen (gleich);

2) nur einerlei Grundzahlen haben (gleichbasig);

3) nur einerlei Exponenten haben (gleichnamig);

4) sowohl in der Basis als im Exponenten verschieden sein (ungleich).

II. **Sätze über die Addition und Subtraction der Potenzen.** Da zwischen zwei oder mehreren Potenzen, wie soeben gezeigt wurde, eine vierfache Verschiedenheit möglich ist, so sind offenbar bei der fraglichen Addition und Subtraction vier Fälle denkbar. Es kann sich nämlich darum handeln:

1) wie die Potenz	$6a^4$	zu	$9a^4$	zu addiren, oder von ihr zu subtrahiren									
2) „ „ „	$6a^4$	„	$9a^5$	„	„	„	„	„	„	„			
3) „ „ „	$6a^4$	„	$9b^4$	„	„	„	„	„	„	„			
4) „ „ „	$6a^4$	„	$9b^5$	„	„	„	„	„	„	„			

ist. Nun ergiebt unter

1) die Addition	$15a^4$	und die Subtraction	$3a^4$ (§ 3, II),	
2) „ „	$9a^5+6a^4$	„ „ „	$9a^5-6a^4$,	
3) „ „	$9b^4+6a^4$	„ „ „	$9b^4-6a^4$,	
4) „ „	$9b^5+6a^4$	„ „ „	$9b^5-6a^4$.	

Mithin:

a) Nur solche Potenzen, die gleiche Basen und gleiche Exponenten haben, können addirt, resp. subtrahirt werden; ist dies der Fall, so werden ihre Coefficienten addirt, resp. subtrahirt.

b) In allen andern Fällen können diese 2 Operationen nur angedeutet werden.

c) Der Regel unter a) zu Folge muß auch $3a^{-5} + 5a^{-5} = 8a^{-5}$ sein, unbekümmert darum, was a^{-5} bedeutet.

III. **Die Ordnung der Glieder eines Aggregats.** In der Summe $a^2 + 3a^3 - 6a^4 + 9a^5$, deren Summanden Potenzen enthalten, werden die Exponenten der Basis a größer; in der Summe $5a^4 - 3a^3 + 6a^2 - a$ dagegen kleiner; in dem Polynom $3ab^6 - 4a^2b^4 + 6a^3b^3 - 7a^4b^2 + 9a^5b$ endlich werden die Exponenten der Grundzahl a größer, die der Basis b kleiner. Man sagt daher:

Die erste Summe sei nach steigenden Potenzen, die zweite nach fallenden Potenzen der Basis a, die dritte gleichzeitig nach steigenden Potenzen von a und fallenden von b geordnet.

IV. **Ausgeführte Beispiele.**

1. Beispiel.

$(9a^4 - 7a^3b + 15a^2b^2) + (6\frac{2}{3}a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 + 6ab^3) + (9\frac{2}{5}a^3b + 10a^2b^2 + ab^3) =$

$$\begin{array}{r} 9a^4 - 7a^3b + 15a^2b^2 \\ 6\frac{2}{3}a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 + 6ab^3 \\ + 9\frac{2}{5}a^3b + 10a^2b^2 + ab^3 \\ \hline 15\frac{2}{3}a^4 - \frac{3}{5}a^3b + 30a^2b^2 + 7ab^3. \end{array}$$

2. Beispiel.

$7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - [6a^9 - (23a^6 - 4a^9) + 12a^4] - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - [6a^9 - 23a^6 + 4a^9 + 12a^4] - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - 5a^4 + 6a^9 - 23a^6 + 4a^9 + 12a^4 + 13a^6 + 17a^9] =$
$7a^4 - 11a^6 + 5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6 - 17a^9] =$

$$- a^6 - 27a^9.$$

oder kürzer, indem man sämmtliche Klammern auf einmal löst,

$7a^4 - 11a^6 + 5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6 - 17a^9 =$

$$- a^6 - 27a^9.$$

Zur weiteren Uebung können die Beispiele in „M. Hirsch" und „Hofmann" dienen.

§ 9.

Multiplication und Division der Potenzen.

I. **Sätze hierüber.** Wie bei der Addition und Subtraction, so kommen auch bei der Multiplication und Division der Potenzen vier Fälle in Betracht. Es kann nämlich beispielsweise verlangt werden:

a) $6a^2$ **mit** $9a^2$ **zu multipliciren, und** $15a^2$ **durch** $3a^2$ **zu dividiren.** Nach §. 7 ist $6a^2 . 9a^2 = 6aa . 9aa$, was nach §. 5, II, 5 = $54aaaa$ giebt, wofür man aber nach §. 7 $54a^4$ schreibt, also ist $6a^2 . 9a^2 = 54a^4$. $\frac{15a^2}{3a^2} = \frac{15aa}{3aa} = 5$, also ist $\frac{15a^2}{3a^2} = 5a^{2-2} = 5$. Man ersieht hieraus, daß bei der Multiplication die Exponenten **addirt**, bei der Division **subtrahirt** wurden (der Exponent der Divisorpotenz von dem der Dividendenpotenz).

b) $6a^2$ **mit** $9a^3$ **zu multipliciren und** $15a^4$ **durch** $3a^2$ **zu dividiren.** $6a^2 . 9a^3 = 6aa\ 9aaa = 54aaaaa = 54a^5$, also $6a^2 . 9a^3 = 54a^{2+3} = 54a^5$. $\frac{15a^4}{3a^2} = \frac{15aaaa}{3aa} = 5aa, = 5a^2$, also $\frac{15a^4}{3a^2} = 5a^{4-2} = 5a^2$.

c) $6a^2$ **mit** $9b^2$ **zu multipliciren und** $15a^4$ **durch** $3b^4$ **zu dividiren.** $6a^2 . 9b^2 = 6aa . 9bb = 54aabb = 54abab = 54(ab)^2 = 54a^2b^2$. $\frac{15a^4}{3b^4} = \frac{15aaaa}{3bbbb} = 5\left(\frac{aaaa}{bbbb}\right) = 5\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = 5\left(\frac{a}{b}\right)^4$.

d) $6a^2$ **mit** $9b^3$ **zu multipliciren und** $15a^4$ **durch** $3b^3$. **zu dividiren.** $6a^2 . 9b^3 = 54a^2b^3$ und $\frac{15a^4}{3b^3} = 5\frac{a^4}{b^3}$. Aus diesen Beispielen lernt man:

1) Potenzen mit gleicher Basis werden mit einander **multiplicirt**, indem man die Exponenten addirt und die erhaltene Summe der gemeinschaftlichen Basis als Exponent hinzufügt, also $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9$; $a^m \cdot a^n . a^p \cdot a^q = a^{m+n+p+q}$ — und durch einander **dividirt**, indem man den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus subtrahirt und die erhaltene Differenz der gemeinschaftlichen Basis als Exponent hinzufügt, also $\frac{32a^9}{4a^5} = 8a^{9-5} = 8a^4$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Man lese die beiden Gesetze auch von rechts nach links!

2) Potenzen von ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten werden mit einander **multiplicirt**, indem man die Basen mit einander multiplicirt und dem erhaltenen Product den gemeinschaftlichen Exponenten als Exponent giebt, also $3^4 . 5^4 = (3 . 5)^4$, $a^4 . b^4 = (ab)^4$ — und durch einander **dividirt**, indem man die Basen durch

einander dividirt und dem erhaltenen Quotienten den gemeinschaftlichen Exponenten als Exponent giebt, also $a^4 : b^4 = \left(\frac{a}{b}\right)^4$. Man lese diese beiden Gesetze auch von rechts nach links!

3) Bei ungleichen Basen und ungleichen Exponenten können beide Operationen nur angedeutet werden.

4) Was die Multiplication eines Polynoms von Potenzen mit einem Monom, resp. die Division eines Aggregats durch ein Monom; ferner die Multiplication, resp. Division zweier solcher Polynome, endlich die Division eines Monoms durch ein Polynom betrifft, so gelten hiefür die in den § § 5 und 6 für die betreffenden Fälle entwickelten Sätze.

II. Bedeutung einer Potenz von der Form a^0 und a^{-n}.

1) Ist etwa a^3 durch a^3 zu dividiren, so erhält man $\frac{aaa}{aaa} = 1$, denn jede Zahl durch sich selbst dividirt, giebt Eins. Nun ist aber auch $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Mithin muß auch $a^0 = 1$ sein; ebenso ist $4^4 : 4^4 = 4^0 = 1$. Hieraus ziehen wir den Satz:

Jede Potenz, deren Exponent Null ist, ist gleich Eins.

2) $2^4 : 2^7 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$; es ist aber auch $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$ und endlich ist auch $2^4 : 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3}$; mithin muß $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ sein. Diese Thatsache führt zu folgendem Satz:

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Quotienten, der zum Dividendus 1 und zum Divisor die Potenz mit positivem Exponenten hat.

3) 2^{-3} ist, wie soeben gezeigt wurde, $= \frac{1}{2^3}$, mithin auch $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$; ferner $\frac{2^4}{2^7} \cdot \frac{3^2}{3^5} = 2^{-3} \cdot 3^{-3} = \frac{1}{2^3 \cdot 3^3}$. Allgemein, $\frac{a^4 b^5}{c^6 d^9} = a^4\, b^5\, c^{-6}\, d^{-9} = \frac{1}{a^{-4}\, b^{-5}\, c^6\, d^9} = \frac{a^4\, b^5\, c^{-6}}{d^9} = \frac{a^4\, b^5\, d^{-9}}{c^6} = \frac{a^4}{b^{-5}\, c^6\, d^9} = \frac{b^5}{a^{-4}\, c^6\, d^9}$. Diese Beispiele berechtigen zu folgender Schlußfolgerung:

Stehen Potenzen mit negativen Exponenten als Factoren im Zähler eines Bruches, so kann man sie mittelst der Formel $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ mit positivem Exponenten als Factoren in den Nenner bringen und umgekehrt.

a.

$$4)\ a^m . a^{-n} = a^m . \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)}.$$

b.

$$a^{-m} . a^n = \frac{1}{a^m} . a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

c.

$$a^{-m} . a^{-n} = \frac{1}{a^m} . \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{(-m)+(-n)}.$$

d.

$$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}.$$

e.

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m . a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}.$$

f.

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-(m-n)}.$$

g.

$$(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{a^n} . \frac{1}{b^n} = a^{-n} b^{-n}.$$

h.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$$

Die Resultate dieser Beispiele führen zu folgendem Schlusse:

Alle Sätze der Potenzen (für Multiplication und Division) mit positiven Exponenten gelten auch für die Potenzen mit negativen Exponenten.

III. Berechnung einiger Beispiele.

1. Beispiel

$$\frac{3(a+b)^m c^n}{5(g+h)^r} \cdot \frac{7(a+b)^q c^g}{4(g+h)^s} = \frac{21(a+b)^{m+q} c^{g+n}}{20(g+h)^{r+s}}$$

2. Beispiel

$$\left(\frac{4a^2}{5} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{4ab^2}{2} - \frac{3b^3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3a^2b^3}{4} - \frac{2ab^4}{3}\right) = ?$$

$$\frac{4a^3}{5} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{3ab^2}{2} - \frac{3b^3}{8}$$

$$\frac{3a^2b^3}{4} - \frac{2ab^4}{3}$$

$$\overline{\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{5a^4b^4}{8} + \frac{9a^3b^5}{8} - \frac{9a^2b^6}{32}}$$

$$- \frac{8a^4b^4}{15} + \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}$$

$$\overline{\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{139a^4b^4}{120} + \frac{121a^3b^5}{72} - \frac{41a^2b^6}{32} + \frac{ab^7}{4}}$$

3. Beispiel

$$\left(\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{139a^4b^4}{120} + \frac{121a^3b^5}{72} - \frac{41a^2b^6}{32} + \frac{ab^7}{4}\right) : \left(\frac{4a^3}{5} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{3ab^2}{2} - \frac{3b^3}{8}\right) = ?$$

$$\frac{4a^3}{5} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{3ab^2}{2} - \frac{3b^3}{8} \Bigg| \frac{3a^5b^3}{5} - \frac{139a^4b^4}{120} + \frac{121a^3b^5}{72} - \frac{41a^2b^6}{32} + \frac{ab^7}{4} \Bigg| = \mathbf{\frac{3a^2b^3}{4} - \frac{2ab^4}{3}}$$

$$\frac{3a^5b^4}{5} - \frac{15a^4b^4}{24} + \frac{9a^3b^5}{8} - \frac{9a^2b^6}{32}$$

$$- \quad + \quad - \quad +$$

$$\overline{- \frac{8a^4b^4}{15} + \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}}$$

$$- \frac{8a^4b^4}{15} + \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}$$

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

$$\overline{\qquad\qquad 0 \qquad\qquad}$$

Zur weiteren Uebung können die Aufgaben in „M. Hirsch“ oder „Hofmann“, Multiplication und Division einfacher und zusammengesetzter Ausdrücke, benützt werden.

§ 10.

Potenzen von Potenzen.

1) Die Potenz 2^2 kann 2, 3, 4 mal u. s. w. als Factor gesetzt werden. Hiedurch erhält man $2^2 . 2^2$; $2^2 . 2^2 . 2^2$; $2^2 . 2^2 . 2^2 . 2^2$. Diese Ausdrücke ergeben als Resultat beziehungsweise $2^{2+2} = 2^4$, $2^{2+2+2} = 2^6$. Statt $2^2 . 2^2$, $2^2 . 2^2 . 2^2$ u. s. w. kann man aber kürzer schreiben $(2^2)^2$, $(2^2)^3$, $(2^2)^4$, welche Ausdrücke beziehungsweise 2^4, 2^6, 2^8 als Resultate liefern. Auch $(a^3)^{-2}$ ist gleich a^{-6}; denn $(a^3)^{-2} = \frac{1}{(a^3)^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$; ebenso $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$ und $(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = a^{-m\,.\,-n}$.

Aus diesen Beispielen folgt:

Potenzen werden **potenzirt**, indem man die Basis unverändert läßt und ihr das Product sämmtlicher Exponenten als Exponent giebt.

2) $(-2)^2 = (-2) . (-2) = 4$

$(-2)^3 = (-2) . (-2) . (-2) = -8$

$(-2)^4 = (-2) . (-2) . (-2) . (-2 = 16$

$(-2)^5 = (-2) . (-2) . (-2) . (-2) . (-2) = -32.$

Bedeutet n eine beliebige ganze Zahl, so ist $2n$ immer eine gerade und $2n+1$ eine ungerade Zahl; folglich ist:

$(-a)^{2n} = + a^{2n}$ und $(-a)^{2n+1} = - a^{2n+1}$.

Aus diesen Beispielen läßt sich folgern:

Alle geraden Potenzen (deren Exponenten gerade Zahlen sind) irgend einer positiven oder negativen Zahl sind positive Zahlen, die ungeraden Potenzen einer negativen Basis sind negative Zahlen.

1. Beispiel

$[(a^4b^2c^3)^5]^6 = a^{120}b^{60}c^{90}$

2. Beispiel

$(-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3 =$

$16a^{12} - 8a^{12} - 9a^{12} + 125a^{12} = \mathbf{124a^{12}}$

3. Beispiel.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} =$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{4} =$$

$$\frac{16 \,.\, 27 \,.\, 25 \,.\, 32 \,.\, 625}{9 \,.\, 8 \,.\, 16 \,.\, 1 \,.\, 16} = 11718\tfrac{3}{4}.$$

Zur weiteren Uebung können die Aufgaben in „M. Hirsch“ und „Hofmann“ dienen, Potenzen von Potenzen.

§ 11.

Quadrirung und Kubirung zusammengesetzter Ausdrücke.

I. Quadrirung eines Binoms.

1) $12^2 = (10 + 2)^2 = (10 + 2)\,(10 + 2) =$

$$\begin{array}{r} 10 + 2 \\ 10 + 2 \\ \hline 10^2 + 10 \,.\, 2 \qquad \\ + 10 \,.\, 2 + 2^2 \\ \hline \end{array}$$

$12^2 = (10 + 2)^2 = 10^2 + 2\,(10 \,.\, 2) + 2^2 = 144.$

2) $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) =$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ + ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

3) $10^2 = (12 - 2)^2 = (12 - 2)\,(12 - 2) =$

$$\begin{array}{r} 12 - 2 \\ 12 - 2 \\ \hline 12^2 - 12 \,.\, 2 \qquad \\ - 12 \,.\, 2 + 2^2 \\ \hline \end{array}$$

$10^2 = (12 - 2)^2 = 12^2 - 2\,(12 \,.\, 2) + 2^2 = 100.$

4) $(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) =$

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \qquad \\ - ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2.$

Diese Beispiele lehren:

Das Quadrat eines Binoms besteht aus dem Quadrat des ersten Gliedes, aus dem doppelten Producte der zwei Glieder und aus dem Quadrat des zweiten Gliedes.

II. Quadrirung eines Polynoms.

1) Setzt man in dem Polynom $(a + b + c)^2$

$$a + b = n$$

so folgt:

$(a + b + c)^2 = (n + c)^2 = n^2 + 2nc + c^2$. Wird nun statt n sein Werth eingesetzt, so folgt $(a + b)^2 + 2(a + b)\,c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c\,(a + b) + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + b^2$.

2) Setzt man in dem Polynom $(a + b + c + d)^2$

$$(a + b + c) = n$$

so hat man $(a + b + c + d)^2 = (n + d)^2 = n^2 + 2dn + d^2$. Wird nun statt n sein Werth $(a + b + c)$ gesetzt, so folgt: $(a + b + c)^2 + 2d\,(a + b + c) + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c\,(a + b) + c^2 + 2d\,(a + b + c) + d^2$, oder wenn man die Klammern löst, $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$.

3) $148^2 = (100 + 40 + 8)^2 = 100^2 + 40^2 + 8^2 + 2 \,.\, 100 \,.\, 40 + 2 \,.\, 100 \,.\, 8 + 2 \,.\, 40 \,.\, 8 = 10000 + 1600 + 64 + 8000 + 1600 + 640 = 21904$.

Aus diesen Beispielen geht hervor:

Das Quadrat eines Polynoms besteht aus den Quadraten aller Glieder und den doppelten Producten eines jeden Gliedes mit jedem nachfolgenden, also: $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$, oder geordnet $a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$.

Zusatz. $(12 + 8) \,.\, (12 - 8) = 12 + 8$

$$\begin{array}{r} 12 + 8 \\ 12 - 8 \\ \hline 12^2 + 12 \,.\, 8 \\ - 12 \,.\, 8 - 8^2 \\ \hline 12^2 - 8^2 \end{array}$$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Also, das Product aus der Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

III. **Kubirung eines Binoms.**

1) $24^3 = (20 + 4)^3 = (20 + 4) \cdot (20 + 4) \cdot (20 + 4)$. Nun ist nach I dieses §. $(20 + 4).(20 + 4) = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 4 + 4^2$, mithin ist $(20 + 4)^3 =$

$$\begin{array}{l} 20^2 + 2\,(20 \cdot 4) + 4^2 \\ 20 + 4 \\ \hline 20^3 + 2(20^2 \cdot 4) + 20 \cdot 4^2 \\ \qquad 20^2 \cdot 4 + 2 \cdot (20 \cdot 4^2) + 4^3 \\ \hline \end{array}$$

$$24^3 = (20 + 4)^3 = 20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 4 + 3 \cdot 20 \cdot 4^2 + 4^3 = 13824.$$

2) $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$; da nun $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist, so ergiebt sich für $(a + b)^3 =$

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \qquad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline \end{array}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Der Kubus eines Binoms besteht also:

Aus dem Kubus des ersten Gliedes, aus dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multiplicirt mit dem zweiten, aus dem dreifachen ersten Gliede multiplicirt mit dem Quadrat des zweiten Gliedes und aus dem Kubus des zweiten Gliedes.

IV. **Kubirung eines Polynoms.** Setzt man in dem Polynom $(a + b + c)^3$ $a + b = A$, so geht $(a + b + c)^3$ über in $(A + c)^3 = A^3 + 3A^2c + 3Ac^2 + c^3$. Setzt man nun statt A seinen Werth $a + b$ ein, so folgt $(a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$. Man formulire dieses Gesetz in Worten!

Uebungsmaterial zu diesem §. findet sich in „Hofmann" unter Quadrirung und Kubirung zusammengesetzter Ausdrücke.

Fragen und Aufgaben.

1) Was ist eine Potenz? Welche Benennungen kommen bei jeder Potenz vor?

2) Was versteht man unter dem Quadrat, dem Kubus und dem Biquadrat einer Zahl?

3) Welcher Unterschied findet zwischen Coefficient und Exponent statt? Nachweis an Beispielen!

4) Von welcher Zahl kann 16, 64, 81 eine Potenz sein? Die wievielte?

5) Welche Potenz wird durch Vertauschung ihrer Basis mit ihrem Exponenten dem Werthe nach nicht verändert?

6) Was sind gerade, ungerade, gleiche, gleichbasige, gleichnamige und ungleiche Potenzen?

7) Welche Arten von Zahlen sind im vorliegenden Abschnitt als Dignanden und als Exponenten aufgetreten?

8) Was ist eine ganze, eine positive, eine negative (Minus—) und endlich eine Nullpotenz?

9) Welche Fälle können bei der Addition und Subtraction von Potenzen vorkommen? Welche Regeln gelten für dieselben?

10) Wann heißen die Glieder eines Aggregats geordnet? Wie können sie geordnet sein? Welche Bedeutung hat das Ordnen der Glieder für die Multiplication und Division?

11) Wie ist das folgende Polynom geordnet, $4ax^6 + 9a^2x^5 - 5a^3x^4 + 7a^4x^3 - 11a^5x^2 + 15a^6x$?

12) Welche Regeln sind über die Multiplication und Division von Potenzen zu beachten?

13) Wie entstehen Potenzen von der Form a^0 und a^{-n}? Was ist über deren Bedeutung zu sagen?

14) Welche Formveränderung kann in Folge der Gleichung $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ an einem Bruch vorgenommen werden, dessen Zähler und Nenner Factoren mit negativen Exponenten enthalten?

15) Haben Potenzen von der Form a^{-3}, a^{-4}, a^{-5} u. s. w. einen positiven oder negativen Werth? Unter welcher Voraussetzung haben sie den einen oder den andern?

16) Man ergänze die fehlende Seite folgender Formeln und drücke sie in Worten aus:

$a^n . a = ?$	$a^{m+n} = ?$	$(-a)^{2n} = ?$
$a^n : a =$	$a^{m-n} =$	$(-a)^{2n+1} =$
$a^m . a^n =$	$a^n . b^n =$	$(a \pm b)^2 =$
$a^m : a^n =$	$a^n : b^n =$	$(a + b)(a - b) =$
$(ab)^n =$	$a^{mn} =$	$(a \pm b)^3 =$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$	$a^0 =$	$(a + b + c)^2 =$
$(a^m)^n =$	$a^{-n} =$	$(a + b + c)^3 =$

17) Man drücke durch allgemeine Zahlzeichen in Verbindung mit Ziffern und den bekannten Operationszeichen (wenn nöthig unter Anwendung von Klammern aus:

a) das Quadrat, den Kubus und das Biquadrat einer Summe einer Differenz, eines Products, eines Quotienten und einer Potenz;

b) die Summe und die Differenz zweier Zahlen, dividirt durch das Quadrat, den Kubus einer dritten;

c) die Summe, die Differenz, das Product und den Quotienten zweier Quadrat=, zweier Kubik= und zweier Biquadratzahlen.

d) Das Quadrat, den Kubus und das Biquadrat der Summe, der Differenz, des Products und des Quotienten zweier Quadratzahlen.

18) Man drücke in Worten aus:

$$\frac{a^2+b^2}{x^3};\quad \frac{a^2+a}{b^2+c^2};\quad \frac{a^3b^3}{c^4};\quad \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2};\quad \frac{(a+x)^3}{a^3+x^3};\quad \frac{(a-x)^3}{a^2-x^2}.$$

Anmerkung. Die beiden letzten Aufgaben haben den Zweck, die Schüler in der richtigen Auffaßung, Unterscheidung, Bezeichnung und Benennung von **Zahlformen** zu üben.

Dritter Abschnitt.

Lehre von den Wurzeln.

§ 12.

Von den Wurzeln im Allgemeinen.

I. **Begriff „Wurzel einer Zahl.“** Die Zahlen 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 u. s. f. sind alle in zwei gleiche Factoren zerlegbar, nämlich 9 in 3 . 3, 16 in 4 . 4, 25 in 5 . 5 u. s. f. Ebenso lassen sich die Zahlen 8, 27, 64, 125 u. s. w. in je drei gleiche Factoren zerlegen, 8 in 2 . 2 . 2, 27 in 3 . 3 . 3, 64 in 4 . 4 . 4, 125 in 5 . 5 . 5 . Zahlen, wie 16, 81, 256, 625 u. s. f. können in 4 gleiche Factoren zerfällt werden, nämlich 16 in 2 . 2 . 2 . 2, 81 in 3 . 3 . 3 . 3, 256 in 4 . 4 . 4 . 4, 625 in 5 . 5 . 5 . 5. Diese gleichen Faktoren, in welche sich Zahlen zerlegen lassen, heißen Wurzeln der Zahlen.

Unter der **Wurzel** einer Zahl versteht man den einen der

gleichen Factoren, in welche sich die Zahl zerlegen läßt. Die Zahl, welche angiebt, in wie viel gleiche Factoren eine gegebene Zahl zerlegt werden soll, heißt der **Wurzelexponent**. Die zu zerlegende Zahl führt den Namen **Radicand**. Das Geschäft der Zerlegung einer Zahl in zwei oder mehrere gleiche Factoren nennt man das **Wurzelausziehen** oder **Radiciren**. Dieses Geschäft wird durch das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ (ein verzogenes r, der Anfangsbuchstabe des Wortes radix=Wurzel) angedeutet, unter welches der Radicand, über welches der Wurzelexponent geschrieben wird. Der Ausdruck $\sqrt[3]{27}$ bedeutet also, der Radicand 27 soll in 3 gleiche Factoren zerlegt werden. Jeder Ausdruck, vor dem sich ein Wurzelzeichen befindet, heißt ein **Wurzelausdruck.** (Wurzelgröße). Unter der **Quadratwurzel** oder zweiten Wurzel einer Zahl versteht man den einen der zwei gleichen Factoren, in welche die Zahl zerlegt werden kann. So ist 2 die Quadratwurzel aus 4. Die symbolische Bezeichnung für das Ausziehen der Quadratwurzel ist, $\sqrt[2]{4}$, odre $\sqrt{4}$, allgemein $\sqrt{a}$ (man liest, Quadratwurzel aus a). Den einen der 3 gleichen Factoren, in die sich eine Zahl zerlegen läßt, nennt man die **Kubikwurzel** oder dritte Wurzel dieser Zahl; 3 ist also die Kubikwurzel aus 27 (Bezeichnung, $\sqrt[3]{27}$, gelesen Kubikwurzel aus 27). Endlich versteht man unter der **Biquadratwurzel** oder vierten Wurzel einer Zahl den einen der 4 gleichen Factoren, in welche die Zahl zerfällbar ist; 2 ist also die Biquadratwurzel aus 16 (Symbolisirung, $\sqrt[4]{16}$.)

II. **Irrationale und rationale Zahlen.** Das Quadrat von $\frac{5}{2}$ ist $\frac{25}{4}$; der Kubus von $\frac{5}{2} = \frac{125}{8}$. Diese zwei Beispiele zeigen, daß die Potenz eines eigentlichen Bruches wiederum ein Bruch ist. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nachweisen, daß die Wurzeln vieler Zahlen weder durch ganze Zahlen, noch durch gemischte Zahlen genau darstellbar sind. Aus den Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 sind die Quadratwurzeln der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7; allein aus den dazwischen liegenden Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 u. s. w. lassen sich die Quadratwurzeln nicht genau ausziehen; denn angenommen, die Quadratwurzel aus 8 existire, so müßte diese eine Zahl sein, die zwischen 2 und 3 läge, weil $2 \cdot 2 = 4$, also weniger als 8 und $3 . 3 = 9$ also mehr als 8 ist; sie müßte also eine gemischte Zahl sein.

Da nun aber ein eigentlicher Bruch (vergleiche §. 6, Zusatz), ins Quadrat erhoben, keine ganze Zahl giebt, so folgt, daß sich die Quadratwurzel aus 8 nicht vollständig angeben läßt. Selbstverständlich gilt das Gesagte auch für $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{26}$, $\sqrt[4]{17}$ u. s. w. Obgleich nun von sehr vielen Zahlen keine vollständige Quadratwurzel u. s. w. existirt, so lassen sich doch für alle positiven Zahlen näherungsweise alle Wurzeln bestimmen. Das Vorstehende berechtigt zu folgenden Erklärungen:

Zahlen, die sich weder durch ganze Zahlen, noch durch Brüche genau darstellen lassen, heißen **irrationale Zahlen;** solche sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, überhaupt alle Wurzeln aus ganzen Zahlen, die nicht selbst wieder ganze Zahlen sind. Alle bisher betrachteten Zahlen dagegen, nämlich alle ganzen und gebrochenen, sowohl positiven als negativen Zahlen, heißen **rationale Zahlen.**

§ 13.

Das Ausziehen der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen.

I. **Eintheilung des Radicanden von rechts nach links in Klassen zu 2 Stellen.**

$1^2 = 1$	$10^2 = 100$	$100^2 = 10000$
$2^2 = 4$	$60^2 = 3600$	$300^2 = 90000$
$4^2 = 16$	$80^2 = 6400$	$450^2 = 202500$
$9^2 = 81$	$99^2 = 9801$	$999^2 = 998001$

Aus diesen Beispielen geht hervor:

Das Quadrat

jeder 1 zffg. Zahl ist entweder eine 1 oder 2 ziffg. Zahl,
„ 2 „ „ „ „ „ 3 „ 4 „ „
„ 3 „ „ „ „ „ 5 „ 6 „ „
„ 4 „ „ „ „ „ 7 „ 8 „ „
„ 5 „ „ „ „ „ 9 „ 10 „ „
„ n „ „ „ „ „ (2n—1) „ 2n „ „

Mithin ist auch die Quadratwurzel aus

jeder 1 und 2 ziffg. Zahl eine 1 zifferige Zahl,
„ 3 „ 4 „ „ „ 2 „ „
„ 5 „ 6 „ „ „ 3 „ „
„ 7 „ 8 „ „ „ 4 „ „
„ 9 „ 10 „ „ „ 5 „ „
„ (2n—1) „ 2n „ „ „ n „ „

Damit ist die Eintheilung des Radicanden in Klassen zu 2 Stellen begründet. Es leuchtet auch ein, daß jede zu suchende Quadratwurzel so viele Ziffern hat, als sich im Radicanden Klassen ergeben.

II. **Die Zweideutigkeit der Quadratwurzel.** $(+2)^2 = +4$; ebenso $(-2)^2 = 4$, mithin muß auch $\sqrt{4} = \pm 2$ sein. Hieraus folgt:

Die Quadratwurzel einer positiven Zahl kann positiv oder negativ sein

III. **Das Ausziehen der Quadratwurzel aus positiven ganzen Zahlen.**

a.

Die Zahlen sind vollkommene Quadrate.

1. Beispiel.

$$\sqrt{7921} = ?$$

1) Aus I dieses §. folgt, daß die zu suchende Quadratwurzel eine zweizifferige Zahl ist, weshalb man sie durch $(a + b)$ darstellen kann; a bezeichnet den Werth ihrer Ziffer links, b den der Ziffer rechts. Mithin ist $7921 = (a + b)^2$. Da nun $(a + b)^2$ nach §. 11, I $= a^2 + 2ab + b^2$ ist, so ist eigentlich nur die Aufgabe gestellt, die Zahl 7921 in die Zahlenwerthe dieser drei Glieder zu zerlegen.

2) a bedeutet eine bestimmte Anzahl Zehner, also, da $10^2 = 100$, $20^2 = 400$, $40^2 = 1600$ u. s. w. ist, a^2 eine gewisse Anzahl Hunderter; mithin müssen die Ziffern des Zahlenwerthes a^2 in der Klasse links, nämlich in 79, d. h. 7900 enthalten sein. Nun sind die Quadrate der Zehner der Reihe nach 100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400, 8100; da 7900 zwischen 6400 und 8100 liegt, so muß die zu suchende Quadratwurzel zwischen 80 und 90 liegen. Das höchste vollständige Quadrat, welches in 7900 steckt, ist 6400, mithin ist $a^2 = 6400$, also a (der Zehner) = 80. Der erste Theil der Wurzel oder a ist demnach = 80.

3) Subtrahirt man nun den Zahlenwerth von a^2, nämlich 6400, von 7921, welche Zahl $= a^2 + 2ab + b^2$ ist, so muß der Rest 1521 $= 2ab + b^2$ sein. Das Glied 2ab ist ein Product aus Einern und Zehnern; es hat folglich keine Einer; denn $2 . 10 . 1 = 20$; $2 . 20 . 2 = 80$; $2 . 90 . 9 = 1620$; mithin kann von den Ziffern des Zahlenwerthes 2ab in der letzten Ziffer 1 des Restes 1521 nichts enthalten

ein, sie müssen in 152, d. h. 1520 stecken. Es ist nun einleuchtend, daß a gefunden wird, wenn man mit 2a, nämlich 160 in 1520 dividirt. Da 160 in 1520 neun mal enthalten ist, so ist dieser Quotient 9=b, also 2ab = 2 . 80 . 9 = 1440.

4) Subtrahirt man 2ab = 1440 von 2ab + b² = 1521, so bleibt b² = 81; da nun b = 9, also b² = 81 ist, diese Zahl aber den noch übrig bleibenden Rest von 81 aufhebt, so folgt, daß die gesuchte Quadratwurzel 80 + 9 = 89 ist.

Es ist also:

$$\begin{array}{rcll} a^2 & = & 80^2 & = 6400 \\ 2ab & = & 2.80.9 & = 1440 \\ b^2 & = & 9^2 & = 81 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 & = & 80^2 + 2.80.9 + 9^2 & = 7921. \end{array}$$

Für das Rechnen empfiehlt sich folgende übersichtliche Anordnung:

$$\begin{array}{rl} & \ \ a\ \ +\ b \\ \sqrt{79|21} & = 80 + 9 \\ a^2 = & 6400 \\ \hline 2a = 160\ | & 1521 \\ 2ab = & 1440 \\ \hline & 81 \\ b^2 = & 81 \end{array}$$

Die Bestimmung von 2ab und b² läßt sich in folgender Weise zusammenfassen:

$$\begin{array}{rl} & \ \ a\ \ +\ b \\ \sqrt{79|21} & = 80 + 9 \\ a^2 = & 6400 \\ \hline 2a = & 160|1521 \\ 2ab + b^2 = & 1521 \\ \hline \end{array}$$

Dies Verfahren kann in folgender Art abgekürzt werden:

$$\begin{array}{rl} & \ \ a+b \\ \sqrt{79|21} & = 8\ 9 \\ a^2 = & 64 \\ \hline 2a = 16\ | & 1521 \\ 2ab + b^2 = & 1521 \\ \hline \end{array}$$

2. Beispiel.

$$\sqrt{474721} = ?$$

Die zu suchende Quadratwurzel ist nach I dieses § eine dreizifferige Zahl, kann also durch $(a + b + c)$ dargestellt werden; 474721 ist demnach $= (a + b + c)^2$. Da $(a + b + c)^2$ nach §. 11, II $= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$ ist, so folgt, daß diese 5 Glieder aus der Zahl 474721 heraus zu finden sind. Wie dies geschieht, zeigt das erste ausführlich behandelte Beispiel. Die folgende Ausführung wird daher durch jenes vollkommen verständlich sein.

$$\sqrt{47|47|21} = \overset{a}{600} + \overset{b}{80} + \overset{c}{9} = 689$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = & 360000 \\
\hline
2a = 1200 | & 114721 \\
2ab = & 96000 \\
b^2 = & 6400 \\
\hline
2(a+b) = 1360 | & 12321 \\
2(a+b)c = & 12240 \\
c^2 = & 81 \\
\hline
\end{array}$$

Kürzeres Verfahren.

$$\sqrt{47|47|21} = \overset{a}{6}\,\overset{b}{8}\,\overset{c}{9}$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = & 36 \\
\hline
2a = 12 | & 1147 \\
2ab + b^2 = & 1024 \\
\hline
2(a+b) = 136 | & 12321 \\
2(a+b)c + c^2 = & 12321 \\
\hline
\end{array}$$

3. Beispiel.

$$\sqrt{25|83|68|89} = 5083$$

$$\begin{array}{rl}
 & 25 \\
\hline
100 | & 8368 \\
 & 8064 \\
\hline
1016 | & 30489 \\
 & 30489 \\
\hline
\end{array}$$

In diesem Beispiel wurde gezeigt, wie man beim Ausziehen der Quadratwurzel auf die kürzeste Weise verfährt.

b.

Die Zahlen sind keine vollkommenen Quadrate.

4. Beispiel.

$$\sqrt{5} = ?$$

Man überlege zunächst Folgendes:

$$\sqrt{25} = \sqrt{\frac{2500}{100}} = \sqrt{\frac{250000}{10000}} = \sqrt{\frac{25000000}{1000000}}$$

$$= \frac{\sqrt{2500}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{250000}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{25000000}}{\sqrt{1000000}}$$

$$= \frac{\sqrt{2500}}{10} = \frac{\sqrt{250000}}{100} = \frac{\sqrt{25000000}}{1000}.$$ Folglich:

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{50000000000}{10000000000}} = \frac{\sqrt{50000000000}}{\sqrt{10000000000}} = \frac{\sqrt{50000000000}}{100000}$$

$$\sqrt{50000000000} = \frac{223606}{100000} = 2{,}23606$$

4

4|100
84

44|1600
1329

446|27100
26796

44720|3040000
2683236

Oder

$$\sqrt{5} = 2{,}23606 \ldots.$$

4

4|100
84

44|1600
1329

446|27100
26796

44720|3040000
2683236

Fassen wir nun das ganze Verfahren, das beim **Ausziehen** der Quadratwurzel einzuschlagen ist, kurz und bündig zusammen, so ergiebt sich:

1) Man theilt die gegebene Quadratzahl von rechts nach links in Klassen zu je 2 Stellen; die Zahl der Klassen ist gleich der Anzahl der Stellen in der Wurzel.

2) Man sucht eine Zahl, deren Quadrat das größte ist, welches von der ersten Klasse links des gegebenen Quadrats zu subtrahiren ist; sie ist die erste Ziffer der Wurzel.

3) Zu dem Rest, den man erhält, wenn man das Quadrat dieser ersten Ziffer der Wurzel von der ersten Klasse des gegebenen Quadrats subtrahirt, schreibt man die nächste Klasse herunter, denkt sich rechts eine Ziffer abgestrichen und dividirt mit dem doppelten der bereits gefundenen Wurzel in das Uebrige.

4) Nun multiplicirt man den erhaltenen Quotienten, die zweite Ziffer der zu suchenden Wurzel, mit sich selbst, dann mit dem letzten Divisor und subtrahirt das erhaltene Product.

5) Sodann nimmt man die nächste Klasse herunter, denkt sich rechts wieder eine Ziffer abgestrichen u. s. w. (3 u. 4).

6) Dies Verfahren wird solange fortgesetzt, bis alle Klassen herunter genommen sind. Geht die Rechnung auf, so ist die Wurzel genau gefunden; geht sie nicht auf, so setzt man statt der fehlenden Ziffer Nullenpaare herunter und macht in der Wurzel das Dezimalcomma.

IV. Das Ausziehen der Quadratwurzel aus Bruchzahlen.

a) Aus Dezimalbrüchen.

$0{,}1^2 = 0{,}01$	$0{,}01^2 = 0{,}0001$	$0{,}001^2 = 0{,}000001$
$0{,}5^2 = 0{,}25$	$0{,}02^2 = 0{,}0004$	$0{,}002^2 = 0{,}000004$
$0{,}6^2 = 0{,}36$	$0{,}09^2 = 0{,}0081$	$0{,}007^2 = 0{,}000049$
$0{,}9^2 = 0{,}81$	$0{,}98^2 = 0{,}9684$	$0{,}367^2 = 0{,}134689$

Aus diesen Beispielen ergiebt sich Folgendes:

Die Quadratzahlen der Zehntel sind Hundertel, die der Hundertel Zehntausendtel, die der Tausendtel Milliontel. Mithin hat die Quadratzahl eines Dezimalbruchs immer doppelt soviel Stellen als dieser. Aus diesem Grunde wird auch jeder Dezimalbruch, aus dem die Quadratwurzel gezogen werden soll, in Klassen zu je zwei Ziffern eingetheilt, (vom Komma aus nach rechts, falls Ganze vorhanden sind, selbstverständlich auch nach links). Hat die letzte Klasse

der Dezimalen nur eine Stelle, so wird eine Null angehängt. Im Uebrigen ist das Verfahren dem bisherigen ganz analog.

1. Beispiel.

$$\sqrt{0,11|90|25} = 0,345$$

```
     9
   6|290
     256
  68|3425
     3425
```

2. Beispiel.

$$\sqrt{14|43,84|80|04} = 37,998$$

```
   9
   6|543
     469
  74|7484
     6741
 758|74380
     68301
7598|607904
     607904
```

b) **Aus gemeinen Brüchen.** $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$, mithin $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$; ferner $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$. Aus einem gemeinen Bruch zieht man also die Quadratwurzel, indem man sie aus Zähler und Nenner zieht; dies ist aber nur dann wirklich ausführbar, wenn Zähler und Nenner rational sind. Ist dies nicht der Fall, so kann man den Bruch derartig erweitern, daß die Wurzel im Nenner rational wird, also: $\sqrt{\frac{15}{17}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 17}{17 \cdot 17}} = \sqrt{\frac{255}{17^2}} = \frac{\sqrt{255}}{17}$. Auch kann man den gemeinen Bruch vorher in einen Dezimalbruch verwandeln dann aus diesem die Quadratwurzel ziehen. Dies wird am häufigsten angewandt.

c) **Aus gemischten Zahlen.** Man verwandelt sie in unechte Brüche und verfährt nach b, also, $\sqrt{3\frac{6}{25}} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}$.

Zur weiteren Uebung können die Beispiele in „M. Hirsch", Quadratwurzeln aus Zahlen, dienen.

§ 14.

Das Ausziehen der Kubikwurzel aus bestimmten Zahlen.

I. Eintheilung der als Radicand gegebenen Kubikzahl in Klassen zu 3 Stellen von rechts nach links.

$1^3 = 1$ $\quad 10^3 = 1000$ $\quad 100^3 = 1000000$
$3^3 = 27$ $\quad 59^3 = 505379$ $\quad 451^3 = 91733851$
$9^3 = 729$ $\quad 99^3 = 970299$ $\quad 999^3 = 997002999.$

Diese Beispiele lehren:

Der Kubus

jeder 1 zff. Zahl ist entweder eine 1, 2 oder 3 zff. Zahl,
„ 2 „ „ „ „ „ 4, 5 „ 6 „ „ ,
„ 3 „ „ „ „ „ 7, 8 „ 9 „ „ ,
„ 4 „ „ „ „ „ 10, 11 „ 12 „ „ ,
„ n „ „ „ „ „(3n—2), (3n—1) . 3n„ „ .

Mithin ist auch die Kubikwurzel aus

jeder 1, 2 oder 3 ziffg. Zahl eine 1 ziffg. Zahl,
„ 4, 5 „ 6 „ „ „ 2 „ „ ,
„ 7, 8 „ 9 „ „ „ 3 „ „ ,
„ 10, 11 „ 12 „ „ „ 4 „ „ ,
„ (3n—2), (3n—1)„3n „ „ „ n „ „ ,

Hierauf gründet sich die oben angegebene Eintheilung des Radicanden.

II. Das Ausziehen der Kubikwurzel aus ganzen Zahlen.

1. Beispiel.

$$\sqrt[3]{658503} = ?$$

1) Nach I dieses § ist die zu suchende Kubikwurzel eine zweizifferige Zahl, mithin ist sie durch $(a + b)$ darstellbar und die gegebene Zahl 658503 selbst kann durch $(a + b)^3$ ausgedrückt werden. Da nun $(a + b)^3$ nach § 11 III $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist, so hat man hier die Aufgabe zu lösen, die Zahl 658503 in die Zahlenwerthe dieser vier Glieder zu zerlegen.

2) a bedeutet eine gewisse Anzahl Zehner, also, da $10^3 = 1000$, $20^3 = 8000$, $30^3 = 27000$, $40^3 = 64000$ u. s. w. ist, a^3 eine bestimmte

Anzahl Tausender. Da demnach die Zahl a^3 jedenfalls rechts 3 Nullen hat, so können die Ziffern des Zahlenwerthes von a^3 nicht in den 3 letzten Ziffern der Zahl 658503, nämlich in 503, sondern müssen in der Klasse links, nämlich in 658, d. h. 658000 stecken. Nun sind die Kuben der Zehner der Reihe nach 1000, 8000, 27000, 64000, 125000, 216000, 343000, 512000, 729000. Da 658000 zwischen 512000 und 729000 liegt, so muß die zu suchende Kubikwurzel zwischen 80 und 90 liegen. Der höchste vollständige Kubus, der in 658000 steckt, ist 512000, mithin ist $a^3 = 512000$ und $a = 80$. Der erste Theil der Wurzel ist also 80.

3) Subtrahirt man nun den Zahlenwerth von a^3, nämlich 512000 von 658503, welche Zahl $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist, so muß der Rest $146503 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sein. a steht für eine gewisse Anzahl Zehner, mithin a^2 für Hunderter; der Ausdruck $3a^2b$ ist demnach ein Product aus Hundertern und Einern; die Zahl, welche von diesem Glied repräsentirt wird, hat mithin am Schlusse zwei Nullen. Deshalb ist von der Zahl, deren Stellvertreter $3a^2b$ ist, in den 2 letzten Ziffern des Restes, nämlich in 03 nichts enthalten; sie kann also nur in den 4 ersten, nämlich in 1465, d. i. 146500 enthalten sein. Da nun $\frac{3a^2b}{3a^2} = b$ ist, so folgt, daß b erhalten wird, indem man die Zahl 146500 durch $3a^2$, d. h. $3 \,.\, 80^2 = 19200$ dividirt. Der erhaltene Quotient 7 muß mithin b und daher $3a^2b = 3 \,.\, 80^2 \,.\, 7 = 134400$ sein.

4) Subtrahirt man nun den Zahlenwerth $3a^2b = 134400$ von dem Reste $146503 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, so muß der nunmehrige Rest, nämlich $12103 = 3ab^2 + b^3$ sein. Der Ausdruck $3 \,.\, 40 \,.\, 3^2$, ein Product von Zehnern und dem Quadrate von Einern, hat, als eine Zahl dargestellt, nämlich als 1080, am Schlusse rechts eine Null; mithin muß auch die Zahl, welche von dem Glied $3ab^2$ repräsentirt wird (es ist ein Product von Zehnern in das Quadrat von Einern) am Schlusse rechts eine Null haben. Folglich müssen die Ziffern dieses Zahlenwerthes in den vier ersten Ziffern des Restes 12103, nämlich in 1210, d. i. 12100 enthalten sein. Subtrahirt man daher $3ab^2 = 3 \,.\, 80 \,.\, 7^2 = 11760$ von dem Rest $12103 = 3ab^2 + b^3$, so muß der Rest von $343 = b^3$ sein.

5) Da nun $b^3 = 7^3 = 343$ den Rest 343 tilgt, so ist die Kubikwurzel gefunden; sie heißt $80 + 7 = 87$.

Es ist also:

$$\begin{aligned} a^3 &= 80^3 = 512000 \\ 3a^2b &= 3 \cdot 80^2 \cdot 7 = 134400 \\ 3ab^2 &= 3 \cdot 80 \cdot 7^2 = 11760 \\ b^3 &= 7^3 = 343 \end{aligned}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 80^3 + 3 \cdot 80^2 \cdot 7 + 3 \cdot 80 \cdot 7^2 + 7^3 = 658503.$$

Diese Rechnungen lassen sich in folgender Weise übersichtlich darstellen:

$$\sqrt[3]{658|503} = \overset{a}{80} + \overset{b}{7} = 87.$$

$$\begin{aligned} a^3 &= 512000 \\ 3a^2 &= 19200|146503 \\ 3a^2b &= 134400 \\ 3ab^2 &= 11760 \\ b^3 &= 343 \end{aligned}\ \Bigg\}-$$

oder kürzer

$$\sqrt[3]{658|503} = 8\ 7$$

$$\begin{aligned} a^3 &= 512 \\ 3a^2 &= 192|146503 \\ 3a^2b &= 1344 \\ 3ab^2 &= 1176 \\ b^3 &= 343 \end{aligned}\ \Bigg\}-$$

2. Beispiel.

$$\sqrt[3]{123505992} = ?$$

Die Kubikwurzel aus dieser Zahl muß nach I dieses § eine dreizifferige Zahl sein, weshalb sie durch (a + b + c), die Zahl 123505992 selbst durch $(a + b + c)^3$ darstellbar ist. Da nun nach § 11 IV $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$ ist, so folgt, daß die gegebene Zahl in die Zahlenwerthe dieser 7 Glieder zu zerlegen ist. Die Schlüsse sind in diesem Beispiel selbstverständlich dieselben, wie im ersten, weshalb sie nur angedeutet werden sollen.

$$\sqrt[3]{123|505|992} = 498$$

$$a^3 = 64$$

$$\begin{array}{ll} 3a^2 = & 48|59505 \\ 3a^2b = & 432 \\ 3ab^2 = & 972 \\ b^3 = & 729 \end{array} \Big\} -$$

$$\begin{array}{ll} 3(a+b)^2 = & 7203|5856992 \\ 3(a+b)^2c = & 9408 \\ 3(a+b)c^2 = & 57624 \\ c^3 = & 512 \end{array} \Big\} -$$

III. **Das Ausziehen der Kubikwurzel aus unvollständigen Kuben, aus Dezimalbrüchen, aus gemeinen Brüchen, aus gemischten Zahlen.** Wie hiebei zu verfahren ist, ergiebt sich aus den analogen Fällen der Quadratwurzelausziehung.

Das Verfahren, das beim Ausziehen der Kubikwurzel zu befolgen ist, geht aus den vorstehenden zwei Beispielen klar hervor. Fassen wir es kurz und bündig zusammen:

1) Man theilt die gegebene Zahl von den Einern an in Klassen zu je 3 Ziffern (die äußerste Klasse links kann auch nur 1 oder 2 Ziffern enthalten).

2) Von der ersten Klasse links subtrahirt man die möglichst große Kubikzahl und schreibt die zugehörige Wurzel als ersten Theil der zu suchenden Wurzel.

3) Zum Rest nimmt man die Ziffern der nächsten Klasse herunter und denkt sich rechts 2 Stellen abgestrichen.

4) Das Uebrige dividirt man durch das dreifache Quadrat des gefundenen ersten Theils der Wurzel.

5) Den so erhaltenen Quotienten schreibt man als zweiten Theil der gesuchten Wurzel.

6) Man multiplicirt ihn nun mit dem letzten Divisor und setzt dies Product unter das in 3) erhaltene Resultat so, daß die letzte Ziffer unter die drittletzte zu stehen kommt; sodann bildet man ein Product aus dem Quadrat des Quotienten und dem 3 fachen des ersten Theils der Wurzel und schreibt es von der vorletzten Stelle an unter; endlich setzt man noch den Kubus des Quotienten, von der letzten Stelle des Resultats in 3) angefangen, unter, addirt diese 3 Producte und subtrahirt sie hierauf von dem Resultat 3)

7) Bleibt ein Rest, so wird die Rechnung, nach den Regeln von 3) angefangen, fortgesetzt.

8) Bei irrationalen Kubikwurzeln hängt man dem Rest jedesmal 3 Nullen an.

Zur weiteren Uebung können die Beispiele in „M. Hirsch", Kubikwurzeln aus Zahlen, dienen.

§ 15.

Wurzeln aus Buchstabenausdrücken.

I. Allgemeine Sätze über die Radicirung.

1.

a) $\sqrt{64} = \sqrt{4 \,.\, 16} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{16} = 2 \,.\, 4 = 8.$

b) $\sqrt{64} = \sqrt{4 \,.\, 4 \,.\, 4} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{4} \,.\, \sqrt{4} = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 8.$

c) $\sqrt[3]{a^3b^6c^9d^{12}} = \sqrt[3]{a^3} \,.\, \sqrt[3]{b^6} \,.\, \sqrt[3]{c^9} \,.\, \sqrt[3]{d^{12}}.$

d) $\sqrt[n]{abcd} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} \,.\, \sqrt[n]{c} \,.\, \sqrt[n]{d}.$

Diese Beispiele lehren:

Ein Product wird durch eine Zahl radicirt, indem man jeden einzelnen Factor durch diese Zahl radicirt und die erhaltenen Wurzeln mit einander multiplicirt.

2.

a) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}, \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}.$

b) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$ Aus diesen Beispielen folgt:

Ein Bruch wird durch eine Zahl radicirt, indem man sowohl den Zähler als auch den Nenner durch diese Zahl radicirt und erstere Wurzel durch letztere dividirt.

3.

Aus der Umkehrung dieser beiden Sätze folgt:

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64}$; $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

b) $\sqrt{25} : \sqrt{36} = \sqrt{\frac{25}{36}}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, d. h.

Wurzeln von demselben Exponenten multiplicirt oder dividirt man mit einander, indem man ihre Radicanden multiplicirt oder dividirt.

4.

a) $\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$; $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$.

b) $\sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}} = a^5$, $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. Diese Beispiele berechtigen zu folgendem Satz:

Eine Potenz wird radicirt, indem man ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurzel dividirt und die Basis mit dem erhaltenen Quotienten potenzirt (es wird vorausgesetzt, daß der Wurzelexponent im Potenzexponent aufgeht). Da $\sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$, $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$ ist, so folgt: Wird eine Potenz durch den Potenzexponenten radicirt, so erhält man die Basis.

5.

a) $(\sqrt{9})^3 = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$; $(\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

b) $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$. Aus diesen Beispielen kann der Satz gefolgert werden:

Eine Wurzel wird durch Potenzirung ihres Radicanden potenzirt. Aus $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$ folgt, daß, wenn man eine Wurzel auf den Grad ihres Wurzelexponenten potenzirt, der Radicand erhalten wird.

6.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2$; $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$.

b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}$. Diese Beispiele lehren:

Eine Wurzel radicirt man, indem man den Radicanden durch das Product der Wurzelexponenten radicirt.

7.

a) $\sqrt{2^2} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[8]{2^8}$; $\sqrt[8]{2^8} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt{2^2} = 2.$

b) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[ms]{a^{ns}}$ und umgekehrt. Diese Beispiele enthalten den Satz:

Der Werth einer Wurzel bleibt unverändert, wenn man Wurzel- und Radicandexponent mit ein und derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt.

II. **Wurzeln aus einfachen Ausdrücken.**

Mit Hilfe der Sätze unter I. dieses § können die hieher gehörigen Aufgaben gelöst werden. Die Berechnung einiger Beispiele möge hier noch Platz finden.

1. Beispiel.

$$\sqrt[3]{512 \,.\, 729} = 8 \,.\, 9 = 72.$$

2. Beispiel.

$$\sqrt[3]{\frac{216\, a^9 x^{24} y^{27}}{125 b^{12} c^{15} z^{30}}} = \frac{6a^3x^8y^9}{5b^4c^5z^{10}}.$$

3. Beispiel.

$$\sqrt{2a^2\sqrt{2b^4\sqrt{4c^8}}} = 2abc.$$ (E. Spitz.)

4. Beispiel.

$$\sqrt{(a^2 + b)^4 c^6 \sqrt{27(a^2 + b)^2 c \sqrt[4]{81(a^2 + b)^{24} c^{12}}}} = 3(a^2 + b)^4 c^4.$$

(E. Spitz.)

III. **Quadrat- und Kubikwurzeln aus zusammengesetzten Buchstabenausdrücken.**

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus Aggregaten erfolgt nach den Formeln von $(a + b)^2$, $(a + b + c)^2$, $(a + b + c + d)^2$; deshalb unterscheidet sie sich nicht wesentlich von der Wurzelaus-

ziehung aus decadischen Zahlen. Ebenso verhält es sich mit dem Ausziehen der Kubikwurzel aus Polynomen. Man hat sich hiebei nach den Formeln von $(a + b)^3$, $(a + b + c)^3$ u. s. w. zu richten. In beiden Fällen ist wohl zu beachten, daß vor der Wurzelausziehung die Glieder des Polynoms geordnet werden müssen.

1. Beispiel.

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$$
$$a^2$$
$$\overline{2a \mid 2ab + b^2}$$
$$2ab + b^2$$
$$\overline{}$$

2. Beispiel.

$$\sqrt{a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2} = a + b + c$$
$$a^2$$
$$\overline{2a \mid 2ab + 2ac + b^2}$$
$$2ab \qquad + b^2$$
$$- \qquad -$$
$$\overline{2a + 2b \mid 2ac \qquad + 2bc + c^2}$$
$$2ac \qquad + 2bc + c^2$$
$$- \qquad - \quad -$$

3. Beispiel.

$$\sqrt{\tfrac{9}{4} + 9x - 9x^2 - 36x^3 + 36x^4} = \tfrac{3}{2} + 3x - 6x^2$$
$$\tfrac{9}{4}$$
$$\overline{3 \mid 9x - 9x^2}$$
$$9x + 9x^2$$
$$- \quad -$$
$$\overline{2(\tfrac{3}{2} + 3x) \mid - 18x^2 - 36x^3 + 36x^4}$$
$$- 18x^2 - 36x^3 + 36x^4$$
$$+ \qquad + \qquad -$$

4. Beispiel.

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$

$$a^3$$

$$-$$

$$3a^2 \mid 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$- \quad\quad - \quad\quad -$$

5. Beispiel.

$$\sqrt[3]{64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3} = 4x + 5y$$

$$64x^3$$

$$-$$

$$3a^2 = 48x^2 \mid 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$$

$$240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$$

$$- \quad\quad - \quad\quad -$$

6. Beispiel.

$$\sqrt[3]{\frac{27x^3}{64} + \frac{9x^2y}{8} + xy^2 + \frac{8y^3}{27}} = \frac{3x}{4} + \frac{2y}{3}$$

$$\frac{27x^3}{64}$$

$$3a^2 = \frac{27x^2}{16} \mid \frac{9x^2y}{8} + xy^2 + \frac{8y^3}{27}$$

$$\frac{9x^2y}{8} + xy^2 + \frac{8y^3}{27}$$

$$- \quad\quad - \quad\quad -$$

7. Beispiel.

$$\sqrt[3]{8x^3 + 36x^2y - 48x^2z + 54xy^2 - 144xyz + 96xz^2 + 27y^3 - 108y^2z + 144yz^2 - 64z^3} = 2x + 3y - 4z$$

$$\begin{array}{l}
8x^3 \\
- \\
\hline
3a^2 = 12x^2 \mid 36x^2y - 48x^2z + 54xy^2 - 144xyz + 96xz^2 + 27y^3 \\
\qquad\qquad 36x^2y \qquad\qquad + 54xy^2 \qquad\qquad\qquad + 27y^3 \\
\qquad\qquad - \qquad\qquad\quad - \qquad\qquad\qquad\quad - \\
\hline
12x^2+36xy+27y^2 \mid - 48x^2z - 144xyz + 96xz^2 - 108y^2z + 144yz^2 - 64z^3 \\
\qquad\qquad - 48x^2z - 144xyz \qquad\qquad - 108y^2z \\
\qquad\qquad + \qquad\quad + \qquad\quad + 96xz^2 + \qquad + 144yz^2 - 64z^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \qquad\qquad\quad - \qquad + \\
\hline
\end{array}$$

Also heißt die Kubikwurzel $2x + 3y - 4z$.

Erklärung. Der erste Theil der Wurzel oder a ist $2x$, mithin $3a^2 = 3 \cdot (2x)^2 = 12x^2$. Der zweite Theil der Wurzel oder b ist $3y$, mithin ist $3(a + b)^2 = 3(2x + 3y)^2 = 3(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 12x^2 + 36xy + 27y^2$. Der dritte Theil der Wurzel oder c ist $- 4z$; folglich ist $3(a + b)^2c = 3(2x + 3y)^2 \cdot - 4z = 3(4x^2 + 12xy + 9y^2) \cdot - 4z = - 48x^2z - 144xyz - 108y^2z$. $3(a + b)c^2 = 3(2x + 3y) \cdot (- 4z)^2 = 3(2x + 3y) \cdot 16z^2 = 96xz^2 + 144yz^2$. Endlich ist $c^3 = (- 4z)^3 = - 64z^3$.

§ 16.

Rechnung mit Wurzelgrößen.

Hier handelt es sich um die Formveränderungen von Wurzelausdrücken in den vier Grundrechnungsarten. Diese Verwandlungen ergeben sich aus den Lehrsätzen des § 15. Zwei oder mehrere Wurzelausdrücke können ebenso wie zwei Potenzen eine vierfache Beschaffenheit gegen einander zeigen. Sie können nämlich:

a) im Radicanden und Exponenten übereinstimmen (gleich).

b) gleiche Radicanden, aber verschiedene Exponenten haben.

c) in den Exponenten gleich, in den Radicanden verschieden sein (gleichnamig).

d) in beiden sich unterscheiden. Für jeden dieser 4 Fälle müssen mithin in Nachfolgendem die Regeln der Addition, Subtraction, Multiplication und Division dargelegt werden.

I.

Addition und Subtraction.

1.

a) $3\sqrt{9} + 4\sqrt{9} = 7\sqrt{9}$ und $5\sqrt{9} - 3\sqrt{9} = 2\sqrt{9}$, ebenso

$4\sqrt[3]{7} + 5\sqrt[3]{7} = 9\sqrt[3]{7}$ und $6\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{7} = 3\sqrt[3]{7}$.

b) $8\sqrt[3]{9} + 7\sqrt[4]{9} = (8\sqrt[3]{9} + 7\sqrt[4]{9})$ und $8\sqrt[3]{9} - 7\sqrt[4]{9} =$ $(8\sqrt[3]{9} - 7\sqrt[4]{9})$.

c) $8\sqrt[3]{7} + 7\sqrt[3]{6} = (8\sqrt[3]{7} + 7\sqrt[3]{6})$ und $8\sqrt[3]{7} - 7\sqrt[3]{6} = (8\sqrt[3]{7} - 7\sqrt[3]{6})$,

d) $8\sqrt[3]{7} + 7\sqrt[5]{6} = (8\sqrt[3]{7} + 7\sqrt[5]{6})$ und $8\sqrt[3]{7} - 7\sqrt[5]{6} = (8\sqrt[3]{7} - 7\sqrt[5]{6})$.

Aus diesen Beispielen folgt:

Wurzelausdrücke können nur dann addirt oder subtrahirt werden, wenn sie gleiche Wurzelexponenten und gleiche Radicanden haben; ist dies der Fall, so addirt, resp. subtrahirt man ihre Coefficienten (1, a). Sind die Exponenten und Radicanden der zu addirenden, resp. zu subtrahirenden Wurzelausdrücke ungleich, so

können die beiden in Frage stehenden Operationen nur angedeutet werden (1, b. c. d.).

2.

Der 1. Satz des vorigen § giebt uns ein Mittel an die Hand, gegebene gleichnamige Wurzelausdrücke derart umzuformen, daß sie gleich werden. Sind z. B. folgende Wurzelausdrücke: $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{96}$ gegeben, so folgt auf Grund des angezogenen Satzes: $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{96} = \sqrt{4 \,.\, 6} + \sqrt{9 \,.\, 6} - \sqrt{16 \,.\, 6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 1\sqrt{6} = \sqrt{6}$. Ebenso ergiebt sich: $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} = \sqrt{4 \,.\, 3} + 2\sqrt{9 \,.\, 3} + 3\sqrt{25 \,.\, 3} - 9\sqrt{16 \,.\, 3} = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = -13\sqrt{3}$. Also: Stimmen die zu addirenden oder subtrahirenden Wurzelausdrücke in den Exponenten überein, sind sie also gleichnamig, so suche man deren Radicanden so in zwei Factoren zu zerlegen, daß die betreffende Wurzel aus einem derselben ausgezogen werden kann, der andere aber in allen Wurzelausdrücken der gleiche wird.

3.

Da $\sqrt{24} = \sqrt{4 \,.\, 6} = 2\sqrt{6}$ ist, so ist auch $2\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \,.\, 6} = \sqrt{4 \,.\, 6} = \sqrt{24}$; $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \,.\, 5} = \sqrt{9 \,.\, 5} = \sqrt{45}$; $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Hieraus folgt:

Ein vor einem Wurzelausdruck stehender Coefficient wird als Factor unter das Wurzelzeichen gebracht, indem man ihn auf den Grad des Wurzelexponenten potenzirt.

Ausrechnung einiger Beispiele zu dem Vorhergehenden.

1. Beispiel.

$$9\sqrt[5]{12a^3b^2c} - 15\sqrt[m]{13} + 6\sqrt[n]{7} + 11\sqrt[5]{12a^3b^2c} + 17\sqrt[m]{13} - 8\sqrt[n]{7} - 2b\sqrt{d} + \tfrac{3}{4}\sqrt[9]{8a} + 4c\sqrt{d} = ?$$

$$\begin{array}{l} 9\sqrt[5]{12a^3b^2c} - 15\sqrt[m]{13} + 6\sqrt[n]{7} - 2b\sqrt{d} + \tfrac{3}{4}\sqrt[9]{8a} \\ 11\sqrt[5]{12a^3b^2c} + 17\sqrt[m]{13} - 8\sqrt[n]{7} + 4c\sqrt{d} \\ \hline 20\sqrt[5]{12a^3b^2c} + 2\sqrt[m]{13} - 2\sqrt[n]{7} + (4c - 2b)\sqrt{d} + \tfrac{3}{4}\sqrt[9]{8a}. \end{array}$$

2. Beispiel.

$$3\sqrt{20} + 4\sqrt{8} - 2\sqrt{45} + \sqrt{18} - 5\sqrt{80} + 6\sqrt{32} + 3\sqrt{125} - \sqrt{72} + \sqrt{50} = 3\sqrt{4 . 5} + 4\sqrt{4 . 2} - 2\sqrt{9 . 5} + \sqrt{9 . 2} - 5\sqrt{16 . 5} + 6\sqrt{16 . 2} + 3\sqrt{25 . 5} - \sqrt{36 . 2} + \sqrt{25 . 2} =$$

$$6\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 20\sqrt{5} + 24\sqrt{2} + 15\sqrt{5} - 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = -5\sqrt{5} + 34\sqrt{2} = \mathbf{34\sqrt{2} - 5\sqrt{5}}.$$

3. Beispiel. (M. Hirsch.)

$$\sqrt{45c^3} - \sqrt{80c^3} + \sqrt{5a^2c} = \sqrt{9c^2 \, . \, 5c} - \sqrt{16c^2 \, . \, 5c} + \sqrt{a^2 \, . \, 5c} = 3c\sqrt{5c} - 4c\sqrt{5c} + a\sqrt{5c} = (a - c)\sqrt{5c}.$$

4. Beispiel.

$$\frac{a - x}{a + x}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} = \sqrt{\frac{(a - x)^2(a + x)}{(a + x)^2 \, . \, (a - x)}} = \sqrt{\frac{(a - x)(a - x)(a + x)}{(a + x)(a + x)(a - x)}} = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

5. Beispiel.

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{8^{24}}}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{6^{20}}}} + \sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[6]{5^{60}}}} = 7.$$

Zur weiteren Uebung können die Beispiele in „M. Hirsch", § IV, Rechnung mit Wurzelgrößen, a u. b, benützt werden.

II.

Multiplication.

1.

Nach § 15, I ist $\sqrt{81} = \sqrt{9 . 9} = \sqrt{9} \, . \, \sqrt{9}$, mithin ist auch $\sqrt{9} \, . \, \sqrt{9} = \sqrt{9 . 9} = \sqrt{81}$; desgleichen ist $\sqrt{64} = \sqrt{4 \, . \, 16} = \sqrt{4} \, . \, \sqrt{16}$ und umgekehrt $\sqrt{4} \, . \, \sqrt{16} = \sqrt{4 \, . \, 16} = \sqrt{64}$; $\sqrt{5} \, . \, \sqrt{7} = \sqrt{35}$; $\sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Also:

Haben die zu multiplicirenden Wurzelausdrücke denselben Wurzelexponenten, so multiplicirt man die Radicanden mit einander und giebt dem Product derselben das gemeinschaftliche Wurzelzeichen.

2.

In Satz 7 des § 15 besitzen wir ein Mittel, gegebene Wurzeln, deren Exponenten ungleich sind, in Wurzeln mit gleichen Exponenten umzuformen. Soll z. B. $\sqrt[3]{2}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt werden, so erhält man, da

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} \text{ und}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} \text{ ist, statt}$$

$$\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2} \,.\, \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \,.\, 3^3} = \sqrt[6]{4 \,.\, 27} = \sqrt[6]{108}.$$

Aus diesen Beispielen leiten wir folgendes Verfahren ab:

Haben die zu multiplicirenden Wurzelausdrücke verschiedene Exponenten, so bringt man sie auf Wurzeln mit gleichen Exponenten. Zu dem Zweck sucht man zu denselben das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und multiplicirt mit dem Quotienten aus diesem und jedem einzelnen Wurzelexponenten sowohl den Wurzel- als Potenzexponent des betreffenden Wurzelausdrucks.

3.

Sollen Polynome, deren Glieder Wurzelausdrücke sind, mit einander multiplicirt werden, so geschieht dies nach dem in § 5, 7 entwickelten Gesetze unter Beachtung der Regeln unter 1) und 2) dieses §.

Beispiele zur Einübung des Vorhergehenden.

1. Beispiel.

$$\sqrt{a} \,.\, \sqrt[3]{b} \,.\, \sqrt[4]{c} \,.\, \sqrt[5]{d} \,.\, \sqrt[6]{e} \,.\, \sqrt[10]{f} = \sqrt[60]{a^{30} b^{20} c^{15} d^{12} e^{10} f^6}.$$

2. Beispiel. (M. Hirsch.)

$$(9\sqrt{12} + 3)(5\sqrt{12} + 8) = ?$$

$$\begin{array}{r} 9\sqrt{12} + 3 \\ 5\sqrt{12} + 8 \\ \hline 45 \cdot 12 + 15\sqrt{12} \\ + 72\sqrt{12} + 24 \\ \hline 540 + 87\sqrt{12} + 24 = \\ 564 + 87\sqrt{12}. \end{array}$$

3. Beispiel. (M. Hirsch.)

$$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{6} + 5\sqrt{3} + \sqrt{10}) = ?$$

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} \\ \sqrt{6} + 5\sqrt{3} + \sqrt{10} \\ \hline 3\sqrt{12} + 2\sqrt{30} + \sqrt{42} \\ \qquad + 15\sqrt{6} + 10\sqrt{15} + 5\sqrt{21} \\ \qquad\qquad + 3\sqrt{20} + 2\sqrt{50} + \sqrt{70} \\ \hline 3\sqrt{12} + 2\sqrt{30} + \sqrt{42} + 15\sqrt{6} + 10\sqrt{15} + 5\sqrt{21} + 3\sqrt{20} + 2\sqrt{50} + \sqrt{70}. \end{array}$$

Zur weiteren Uebung können die Beispiele in „M. Hirsch", Multiplication von Wurzelgrößen, dienen.

III.

Division.

1.

Nach § 15, I, 2 ist $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}$; mithin ist auch umgekehrt

$\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$; desgleichen $\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\frac{5}{5}} = \sqrt[3]{1}$.

Also:

Haben die durch einander zu dividirenden Wurzelausdrücke denselben Wurzelexponenten, so dividirt man die Radicanden durch einander und radicirt den erhaltenen Quotienten durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten.

2.

Mit Hilfe des Satzes 7 in § 15 können Wurzelausdrücke, deren Exponenten verschieden sind, zum Zwecke der Division in Wurzelausdrücke mit gleichen Exponenten verwandelt werden. Soll z. B. der Ausdruck $\sqrt[3]{5}$ durch $\sqrt{5}$ dividirt werden, so erhält man, da

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} \text{ und}$$
$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} \text{ ist, statt}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[6]{5^2}}{\sqrt[6]{5^3}} = \sqrt[6]{\frac{5^2}{5^3}} = \sqrt[6]{\frac{25}{125}} = \sqrt[6]{\frac{1}{5}}.$$

Ebenso, da $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2}$ und

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} \text{ ist, statt}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{16}{27}}.$$ Aus diesen Beispielen folgt:

Haben die Wurzelausdrücke, welche durch einander dividirt werden sollen, verschiedene Wurzelexponenten, so verwandelt man sie in Wurzelausdrücke mit gleichen Exponenten und verfährt dann nach 1).

3.

Diese zwei Regeln beziehen sich auf den Fall, wenn Divisor und Dividend Monome sind. Nun sind nach § 6 noch 3 Fälle möglich. Es kann nämlich der Dividendus ein Monom, der Divisor ein Polynom; ferner der Dividendus ein Polynom, der Divisor ein Monom und endlich der Dividendus und der Divisor ein Polynom sein. Die Division wird in allen Fällen nach den in § 6 entwickelten Gesetzen unter Beachtung der Regeln 1) und 2) dieses § ausgeführt. Doch ist hiebei noch Folgendes zu berücksichtigen: Ist der Divisor eine monomische Quadratwurzel, so multiplicirt man Divisor und Dividendus mit der im Divisor stehenden Wurzel. Ist dagegen der Divisor eine zweitheilige Summe oder eine Differenz, in welcher Quadratwurzeln vorkommen, so multiplicirt man Divisor und Dividendus mit der Differenz oder mit der Summe der beiden Glieder des Divisors. Bei 3- oder 4gliederigem Divisor muß man derartige Multiplicationen wiederholt vornehmen. (Man vergleiche § 11, 3, Zusatz).

Zur Einübung der vorstehenden Sätze können die Aufgaben in „M. Hirsch" unter § IV, d, Rechnung mit Wurzelgrößen, Division, benützt werden. Die Berechnung einiger derselben möge hier noch Platz finden.

1. Beispiel. (Nr. 6.)

$$\sqrt[5]{ab^{n-1}c^2} : \sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{dc^{n-1}}} = \sqrt[5]{\frac{ab^{n-1}c^2 \cdot dc^{n-1}}{a^3b^2}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{b^{n-3}c^{n+1}d}{a^2}}.$$

2. Beispiel. (Nr. 8.)

$$\sqrt[3]{a^2bc} : \sqrt[5]{ab^2c^3} = \frac{\sqrt[15]{(a^2bc)^5}}{\sqrt[15]{(ab^2c^3)^3}} = \sqrt[15]{\frac{a^{10}b^5c^5}{a^3b^6c^9}} =$$

$$\sqrt[15]{\frac{a^7}{bc^4}}.$$

3. Beispiel. (Nr. 15.)

$$\sqrt{a^2-z^2} : (a-z) = \sqrt{\frac{a^2-z^2}{(a-z)^2}} = \sqrt{\frac{(a+z)(a-z)}{(a-z)(a-z)}} =$$

$$\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}.$$ (§ 11, I, 4 und II, 3, Zusatz.)

4. Beispiel. (Nr. 22.)

$$1 : (\sqrt{3}+2) = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} =$$

$$\frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = \frac{\sqrt{3}-2}{-1} = 2-\sqrt{3}.$$

5. Beispiel. (Nr. 29.)

$$(1+\sqrt{2}) : (2-\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} =$$

$$\frac{2+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} = 2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}.$$

6. Beispiel. (Nr. 35.)

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{5})} =$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{15}-6} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{15}+6)}{(2\sqrt{15}-6)(2\sqrt{15}+6)} =$$

$$\frac{2\sqrt{30}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{30}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Erläuterung:

$$\begin{array}{l} \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5} \\ \underline{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\ 2+\sqrt{6}-\sqrt{10} \\ \quad -\sqrt{6} \qquad -3+\sqrt{15} \\ \qquad\quad +\sqrt{10}-5+\sqrt{15} \\ \hline 2-8+2\sqrt{15} = 2\sqrt{15}-6. \end{array}$$

IV.

Quadratwurzeln aus einem Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$.

Um die Quadratwurzel aus einem solchen Binom zu finden, verfährt man nach folgender Formel:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Diese Formel erhält man auf folgende Weise:
Man setzt zunächst

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Quadrirt man nun beide Seiten, so ergiebt sich:

$$A + \sqrt{B} = x + 2\sqrt{xy} + y.$$

Setzt man nun

$$x + y = A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und $2\sqrt{xy} = \sqrt{B}$, so erhält man, indem man beide Gleichungen quadrirt:

$$x^2 + 2xy + y^2 = A^2 \text{ und}$$
$$4xy = B.$$

Subtrahirt man beide Gleichungen, so folgt:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = A^2 - B$$

oder $x^2 - 2xy + y^2 = A^2 - B$

" $(x - y)^2 = A^2 - B$

" $x - y = \sqrt{A^2 - B}$

Nun ist bekannt:

$$x + y = A \text{ und}$$

$x - y = \sqrt{A^2 - B}$, mithin erhält man durch Addition beider

$$2x = A + \sqrt{A^2 - B}$$

mithin: $x = \dfrac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$

und durch Subtraction

$$2y = A - \sqrt{A^2 - B}$$

mithin: $y = \dfrac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$

Zieht man nun aus beiden Seiten der Gleichungen 3) und 4) die Quadratwurzel aus, so folgt:

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Setzt man nun diese Werthe von $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ in 1) ein, so erhält man:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

In gleicher Weise findet man:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln können die Beispiele in „M. Hirsch" unter IV, e berechnet werden.

1. Beispiel (Nr. 1).

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49-48}}{2}} + \sqrt{\frac{7 - \sqrt{49-48}}{2}} =$$

$$2 + \sqrt{3}.$$

2. Beispiel (Nr. 2).

$$\sqrt{43-15\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{43+\sqrt{43^2-15^2 . 8}}{2}} - \sqrt{\frac{43-\sqrt{43^2-15^2 . 8}}{2}} =$$

$$5 - \sqrt{18} = 5 - 3\sqrt{2}.$$

§ 17.

Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

I. **Erklärung.** Nach § 15, 6 ist $\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3$; $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. Bei allen bisherigen Rechnungen wurde vorausgesetzt, daß n durch m, d. h. daß der Potenzexponent durch den Wurzelexponenten restlos theilbar sei. Diese Beschränkung wird aufgehoben, sobald man ganz allgemein dem Ausdruck:

$a^{\frac{n}{m}}$ den Werth von $\sqrt[m]{a^n}$ beilegt,

n und m mögen durch einander theilbar sein oder nicht. Ist letzteres der Fall, so erhält man aus $\sqrt[m]{a^n}$ eine Potenz, deren Exponent ein Bruch ist. Demnach: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$. Potenzen von dieser Form heißen **Potenzen mit gebrochenen Exponenten.** Eine solche Potenz drückt **eine Wurzel vom Grade des Nenners aus einer Potenz vom Grade des Zählers des Exponenten aus**, also:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}; \quad a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

II. Rechnung mit solchen Potenzen.

1.

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}; \text{ denn } (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

(Man vergleiche der Reihe nach die Sätze § 9, I, 2, Umkehrung; obige Erklärung; § 15, I, 1.)

2.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}; \text{ denn } \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

3.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}; \text{ denn } \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

4.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}; \text{ denn } a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p}$$
$$= \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}.$$

5.

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}; \text{ denn?}$$

6.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}; \quad \text{denn } a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} =$$
$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

7.

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{mq+np}{nq}}} = a^{-\left(\frac{mq+np}{nq}\right)}.$$

Diese Beispiele berechtigen zu folgendem Schluß:

Alle bisher für die Rechnung mit Potenzen entwickelten Sätze haben auch volle Giltigkeit für die Potenzen mit positiven und negativen Bruchexponenten.

Der Leser ist durch vorstehende Auseinandersetzungen in den Stand gesetzt, die „Bezeichnungen" in M. Hirsch unter Kapitel V, § 1, zu verstehen und die Beispiele unter § II desselben Kapitels zu lösen. Die Art und Weise der Berechnung hieher gehöriger Aufgaben soll noch an einigen Beispielen gezeigt werden.

1. Beispiel. (Nr. 5.)

$$a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{5}} = a^{-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{1}{5}} = a^{\frac{-10+35-4}{20}} = a^{\frac{21}{20}}.$$

2. Beispiel. (Nr. 8.)

$$\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{a^{\frac{7}{8}}b}{c^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{15}{8}}b^{\frac{8}{8}}}{b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{15}{8}}b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{4}}}.$$

3. Beispiel. (Nr. 10.)

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} = a^{\frac{2}{15}} \cdot a^{\frac{9}{24}} = a^{\frac{2}{15}} \cdot a^{\frac{3}{8}} = a^{\frac{2}{15}+\frac{3}{8}} =$$

$$a^{\frac{16+45}{120}} = a^{\frac{61}{120}} = \sqrt[120]{a^{61}}.$$

4. Beispiel. (Nr. 11.)

$$\sqrt[5]{\frac{(c^2-y^2)^3}{(a+x)^8}} \cdot \sqrt[6]{\frac{(c^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a+x}} = \frac{(c^2-y^2)^{\frac{3}{5}} \cdot (c^2-y^2)^{\frac{1}{4}}}{(a+x)^{\frac{8}{5}} \cdot (a+x)^{\frac{1}{6}}} =$$

$$\frac{(c^2-y^2)^{\frac{17}{20}}}{(a+x)^{\frac{53}{30}}}.$$

5. Beispiel. (Nr. 9, b.)

$$(a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}}) : (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}) = ?$$

$$\begin{array}{l|l}
a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}} & a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}} = a^{\frac{5}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}} \\
 & a^3 \qquad\qquad - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} \\
 & - \qquad\qquad\quad + \\
\hline
 & \qquad - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} + 2b^{\frac{13}{12}} \\
 & \qquad - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} + 2b^{\frac{13}{12}} \\
 & \qquad + \qquad\quad - \\
\hline
\end{array}$$

§ 18.

Die imaginären Ausdrücke.

I. **Erklärung.** Nach § 13, II ist $\sqrt{25} = \pm 5$; denn sowohl $(+5)^2$, als $(-5)^2$ giebt 25. Aus -25 kann die Quadratwurzel

weder (+ 5), noch (— 5) sein, da keiner dieser Werthe, zweimal als Factor gesetzt, — 25 giebt. $\sqrt[3]{-27} = -3$; denn $(-3)^3 = -27$. Die 4. Wurzel aus — 81 ist weder (+ 3), noch (— 3), weil $(\pm 3)^4 = 81$ giebt. $\sqrt[5]{-32} = -2$; denn $(-2)^5 = -32$. $\sqrt[6]{-64} = ?$ Aus diesen Beispielen folgern wir:

Jede gerade Wurzel einer negativen Zahl ist weder positiv noch negativ; sie kann daher nicht ausgezogen, sondern nur angedeutet werden. Aus diesem Grunde nennt man jeden Wurzelausdruck, dessen Radicand negativ und dessen Wurzelexponent gerade ist, eine **imaginäre** oder **eingebildete** Zahl. Die Ausdrücke $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-36}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-81}$, $\sqrt{-256}$, $\sqrt[6]{-64}$ sind also imaginäre Zahlen. Im Gegensatz zu ihnen nennt man die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen, sowohl positive als negative, **reelle** oder **wirkliche** Zahlen. $\sqrt[2n]{-a}$ ist die allgemeine Form eines imaginären Ausdrucks und $\sqrt{-1}$, gewöhnlich durch i bezeichnet, die imaginäre Einheit.

II. Die wichtigsten Sätze über die Rechnung mit imaginären Ausdrücken.

1.

Nach § 15, I, 5 ist $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$; $(\sqrt[2]{a})^2 = a$; $(\sqrt[3]{a})^3 = a$; $(\sqrt[n]{a})^n = a$; mithin muß auch, wie dies aus dem Begriff der Wurzel folgt, $(\sqrt[2]{-1})^2 = -1$; $(\sqrt{-a})^2 = -a$ sein. Also:

Das Quadrat einer imaginären Quadratwurzel ist der negative Radicand.

2.

$\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}$ (§ 15, I, 1) $= \pm 4 \cdot i$; $\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \pm \sqrt{a} \cdot i$. Aus diesen Beispielen folgt:

Jede imaginäre Quadratwurzel kann man als ein Product aus einem reellen Factor und der imaginären Einheit darstellen.

3.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$; denn $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-ab}$. Hieraus folgt:

Das Product aus einer reellen und imaginären Quadratwurzel ist imaginär.

4.

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$; denn $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{ab} \cdot -1 = -\sqrt{ab}$. Demnach:

Das Product zweier imaginärer Quadratwurzeln ist reell, aber negativ.

Mit imaginären Quadratwurzeln rechnet man ebenso, wie mit reellen.

Fragen und Aufgaben.

1) Was versteht man unter der Wurzel einer Zahl? Welche Benennungen kommen bei einem Wurzelausdruck vor? Was versteht man unter der Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzel einer Zahl?

2) Welcher Unterschied besteht zwischen rationalen und irrationalen Zahlen?

3) Aus welchem Grunde theilt man bei der Quadratwurzelausziehung den Radicanden von rechts nach links in Klassen zu zwei Stellen, bei der Kubikwurzelausziehung aber in Klassen zu drei Stellen ein?

4) Man stelle einen Vergleich zwischen dem Verfahren, das beim Ausziehen der Quadratwurzel einzuschlagen und dem, welches bei der Kubikwurzelausziehung zu befolgen ist, an!

5) Wie verhält sich die Radicirung zur Potenzirung? Welche 2 Formeln geben diesem Verhältniß Ausdruck?

6) Welche Fehler könnten bei folgenden 4 Aufgaben gemacht werden:

$a^n + b^n = ?$ $a^n - b^n = ?$ $\sqrt[n]{a+b} = ?$ $\sqrt[n]{a-b} = ?$ Welches ist der Werth für $\sqrt{3^2+4^2}$ und für $\sqrt{25 - 9}$? Warum?

7) Welches sind die wesentlichsten Umformungen, welche man mit Wurzelausdrücken zum Zwecke ihrer Addition, Subtraction, Multiplication und Division vornimmt? In welchen Sätzen sind sie begründet?

8) Welche Erweiterungen hat der in § 7 festgesetzte Potenzbegriff, der, streng genommen, nur Potenzen mit ganzen und positiven Exponenten zuläßt, seither erfahren? Was berechtigt zu diesen Erweiterungen?

9) Leisten die Ausdrücke $\sqrt[2]{a^1}$ und $\sqrt[3]{a^2}$ in der Potenzform $a^{\frac{1}{2}}$, resp. $a^{\frac{2}{3}}$ dem in § 12 fixirten Begriff der Quadratwurzel aus a^1 und der Kubikwurzel aus a^2 Genüge? Inwiefern?

10) Man weise nach, daß die Multiplication der beiden Potenzen $a^{\frac{2}{3}}$ und $a^{\frac{3}{5}}$ durch Addition ihrer Exponenten das richtige Product $a^{\frac{19}{15}}$ liefert.

11) Man ergänze die fehlende Seite folgender Formeln und drücke sie in Worten aus:

$\sqrt[n]{a^n} = ?$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = ?$	$\sqrt[mn]{a} = ?$
$(\sqrt[n]{a})^n = ?$	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = ?$	$\sqrt[m]{ab} = ?$
$\sqrt[n]{ab} = ?$	$a\sqrt[n]{b} = ?$	$(ab)^{\frac{p}{q}} = ?$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = ?$	$3\sqrt[n]{a} + 5\sqrt[n]{a} = ?$	$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = ?$
$\sqrt[n]{a^m} = ?$	$a^{\frac{m}{n}} = ?$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = ?$
$(\sqrt[n]{a})^m = ?$	$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = ?$	$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = ?$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = ?$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = ?$	$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = ?$

12) Man drücke durch allgemeine Zahlzeichen in Verbindung mit Ziffern und den Operationszeichen (wenn nöthig unter Anwendung von Klammern) aus:

a) Die Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzel aus einer Summe, einer Differenz, einem Product, einem Quotienten und einer Potenz.

b) Die Summe, die Differenz, das Product und den Quotienten zweier Quadrat-, zweier Kubik- und zweier Biquadratwurzeln.

c) Das Quadrat, den Kubus und das Biquadrat einer Quadrat-, einer Kubik- und einer Biquadratwurzel aus einer Zahl.

d) Die Summe einer Zahl und der Quadratwurzel aus derselben.

13) Man übersetze in die Wortsprache:

$a\sqrt{a+b}$; $(a-z)\sqrt{a-z}$; $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{ab}{\sqrt{a-b}}$; $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a-b}}$; $\frac{\sqrt{a+b}}{c}$.

14) **Welche Rechnungsarten** (von denen, die bis jetzt Gegenstand der Besprechung waren) **haben zu einer Erweiterung der natürlichen Zahlenreihe** (von Null bis ins Unendliche) **geführt? Warum? Welches sind die eingeschalteten Zahlen?**

Vierter Abschnitt.

Reductionen.

§ 19.

Addition und Subtraction von Brüchen.

1.

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{3+5+7}{8}$; $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$;

b) $\frac{12}{9}-\frac{7}{9}=\frac{12-7}{9}$; $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$. Diese Beispiele lehren:

Gleichnamige Brüche werden addirt oder subtrahirt, indem man ihre Zähler addirt, resp. subtrahirt und den Nenner beibehält.

Man lese diese beiden Gleichungen von rechts nach links!

2.

a) $\frac{12+8}{2}+\frac{12-8}{2}=\frac{2.12}{2}=12$; $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{2a}{2}=a$;

b) $\frac{12+8}{2}-\frac{12-8}{2}=\frac{2.8}{2}=8$; $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{2b}{2}=b$.

Aus diesen Beispielen ersieht man:

Die halbe Summe zweier Zahlen, um ihre halbe Differenz vermehrt, giebt die größere Zahl; um ihre halbe Differenz vermindert, die kleinere von beiden.

3.

a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2.4}{3.4}+\frac{3.3}{4.3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$; $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$.

b) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}=\frac{2.20}{3.20}+\frac{3.15}{4.15}+\frac{4.12}{5.12}+\frac{5.10}{6.10}=\frac{40}{60}+\frac{45}{60}+\frac{48}{60}+\frac{50}{60}=\frac{40+45+48+50}{60}$;

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\frac{g}{h}=\frac{adfh}{bdfh}+\frac{cbfh}{bdfh}+\frac{ebdh}{bdfh}+\frac{gbdf}{bdfh}=\frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfh}$. Diese Beispiele enthalten den Satz:

Sind die zu addirenden Brüche ungleichnamig, so macht man sie zunächst gleichnamig und verfährt dann nach Regel 1).

Beispiele zur Einübung vorstehender Sätze.

I.

Zähler und Nenner der zu addirenden Brüche sind Monome.

1. Beispiel.

$\frac{5}{3a}-\frac{7c}{5ab}+8b$. Der Generalnenner, in welchem alle gegebenen Nenner aufgehen, ist 15ab. Jedes dieser 3 Glieder muß nun auf den Hauptnenner gebracht werden. Es geschieht dies, wie die Beispiele unter 3) zeigen, indem man der Reihe nach mit

dem Nenner jedes Gliedes in den Generalnenner dividirt und sodann sämmtliche Zähler und Nenner mit dem erhaltenen Quotienten multiplicirt. Dem letzten Glied, das keinen Nenner hat, geben wir in Gedanken den Nenner 1. Da der Nenner des 1. Gliedes im Generalnenner 5b mal, der des 2. 3 mal, der des 3. 15ab mal enthalten ist, so geht der gegebene Ausdruck

$$\frac{5}{3a} - \frac{7c}{5ab} + 8b \text{ über in}$$

$$\frac{25b}{15ab} - \frac{21c}{15ab} + \frac{120ab^2}{15ab}.$$

Nach Satz 1) dieses § erhalten wir endlich:

$$\frac{25b - 21c + 120ab^2}{15ab}$$

und wir haben somit eine algebraische Summe, deren Glieder Quotienten sind, in einen Quotienten verwandelt, dessen Dividendus ein Polynom ist. Diesen kann man nach § 6, II, 4 sofort wieder in eine algebraische Summe überführen. Es muß noch bemerkt werden, daß vorstehende Rechnung folgendermaßen abgekürzt werden kann:

$$\frac{5}{3a} - \frac{7c}{5ab} + 8b = \frac{25b - 21c + 120ab^2}{15ab},$$

eine Abkürzung, die keiner besonderen Erklärung bedarf.

2. Beispiel.

$$\frac{3ab}{cd} + \frac{4ac}{3bd} - \frac{5ad}{2bc} + \frac{6bc}{5ad} - \frac{3bd}{2ac} - \frac{4cd}{ab} = \frac{90a^2b^2 + 40a^2c^2 - 75a^2d^2 + 36b^2c^2 - 45b^2d^2 - 120c^2d^2}{30abcd}.$$

II.

Die Zähler der zu addirenden Brüche sind algebraische Summen, die Nenner Monome.

3. Beispiel.

$$\frac{2a + 3b}{5} - \frac{4a - 7b}{3} + \frac{6a + 3b}{4} - \frac{7a + 9b}{6} = ?$$

Zunächst bringt man, wie in den vorhergehenden Beispielen, sämmtliche Brüche auf den Generalnenner 60; hiedurch erhält man:

$$\frac{12 \cdot (2a + 3b) - 20(4a - 7b) + 15(6a + 3b) - 10(7a + 9b)}{60}$$

Löst man nun nach § 4, II die Klammern, so ergiebt sich:

$$\frac{24a + 36b - 80a + 140b + 90a + 45b - 70a - 90b}{60}.$$

Zieht man endlich die gleichnamigen Glieder zusammen, so resultirt:

$$\frac{-36a + 131b}{60} \text{ oder } \frac{131b - 36a}{60}.$$

Deutet man die Multiplication nicht an, sondern führt sie sofort aus, so kann man, wie folgt, abkürzen:

$$\frac{2a + 3b}{5} - \frac{4a - 7b}{3} + \frac{6a + 3b}{4} - \frac{7a + 9b}{6} =$$

$$\frac{24a + 36b - 80a + 140b + 90a + 45b - 70a - 90b}{60} =$$

$$\frac{-36a + 131b}{60} \text{ oder } \frac{131b - 36a}{60}.$$

Anmerkung. Man lasse nie außer Acht, daß der Divisionsstrich den Dividendus als einen unzertrennlichen, zusammengehörigen Zahlenausdruck bezeichnet und daß daher beim Wegfallen desselben, falls vor ihm ein — steht, entweder eine Klammer gesetzt werden muß, oder die Vorzeichen sämmtlicher Glieder des Dividendus in die entgegengesetzten zu verwandeln sind.

4. Beispiel.

$$\frac{f + g}{3h} - \frac{f - g}{4h} + \frac{g + 2f}{2h} - \frac{2g - f}{3h} =$$

$$\frac{4f + 4g - 3f + 3g + 6g + 12f - 8g + 4f}{12h} =$$

$$\frac{17f + 5g}{12h}.$$

III.

Die Nenner der zu addirenden Brüche sind zum Theil algebraische Summen.

5. Beispiel.

$$\frac{4a - 3b}{2a - b} - \frac{5a + 7b}{3a + 2b} = ?$$

Da kein Nenner im andern aufgeht, so ist der Hauptnenner gleich dem Product aus beiden Nennern, also $(2a - b) \cdot (3a + 2b)$. Sämmtliche Brüche auf den Generalnenner gebracht, giebt:

$$\frac{(4a - 3b)(3a + 2b) - (5a + 7b)(2a - b)}{(2a - b)(3a + 2b)}.$$

Löst man nun die Klammern, so erhält man:

$$\frac{12a^2 + 8ab - 9ab - 6b^2 - 10a^2 + 5ab - 14ab + 7b^2}{(2a - b)(3a + 2b)}.$$

Zieht man schließlich die gleichnamigen Glieder zusammen, so folgt:

$$\frac{2a^2 - 10ab + b^2}{(2a - b)(3a + 2b)}.$$

6. Beispiel.

$$\frac{4a - 3b}{2a - b} - \frac{2a + b}{3a - 2b} - \frac{5a}{3b} = ?$$

Bringt man sämmtliche Brüche auf den Generalnenner, so ergiebt sich:

$$\frac{3b \cdot (4a - 3b)(3a - 2b) - 3b(2a + b)(2a - b) - 5a \cdot (2a - b)(3a - 2b)}{3b \cdot (2a - b) \cdot (3a - 2b)}$$

Werden nun die Klammern gelöst und die gleichnamigen Glieder zusammengefaßt, so folgt:

$$\frac{59a^2b - 61ab^2 + 21b^3 - 30a^3}{3b \cdot (2a - b) \cdot (3a - 2b)}, \text{ geordnet:}$$

$$= \frac{-30a^3 + 59a^2b - 61ab^2 + 21b^3}{3b \cdot (2a - b)(3a - 2b)}.$$

Anmerkung. Für dergleichen Ausrechnungen kann man anfangs folgende Anordnung treffen:

1) Nebenrechnung.

$$\begin{array}{rrr} 4a & - 3b & \\ 3a & - 2b & \\ \hline 12a^2 & - 9ab & \\ & - 8ab & + 6b^2 \\ \hline 12a^2 & - 17ab & + 6b^2 \\ 3b & & \\ \hline 36a^2b & - 51ab^2 & + 18b^3. \end{array}$$

2) Nebenrechnung.

$$\begin{array}{rrr} 2a & + b & \\ 2a & - b & \\ \hline 4a^2 & + 2ab & \\ & - 2ab & - b^2 \\ \hline 4a^2 & & - b^2 \\ 3b & & \\ \hline 12a^2b & & - 3b^3 \end{array}$$

3) Nebenrechnung.

$$\begin{array}{rrr} 2a & - b & \\ 3a & - 2b & \\ \hline 6a^2 & - 3ab & \\ & - 4ab & + 2b^2 \\ \hline 6a^2 & - 7ab & + 2b^2 \\ 5a & & \\ \hline 30a^3 & - 35a^2b & + 10ab^2. \end{array}$$

Zusammenfassung.

Da das 2. und 3. Glied des Zählers subtractiv sind, so müssen die einzelnen Glieder desselben mit umgekehrten Vorzeichen hingeschrieben werden, also:

$$\begin{array}{rrrr} 36a^2b & - 51ab^2 & + 18b^3 & \\ - 12a^2b & & + 3b^3 & \\ + 35a^2b & - 10ab^2 & & - 30a^3 \\ \hline 59a^2b & - 61ab^2 & + 21b^3 & - 30a^3. \end{array}$$

§ 20.

Die Verwandlung algebraischer Summen in Producte.

Darunter versteht man die Aufsuchung derjenigen Factoren, durch deren Multiplication das Polynom entsteht. Man nennt sie auch **Zerlegung algebraischer Summen in Factoren.** Je nach der Beschaffenheit der einzelnen Glieder kann die Factorenzerlegung auf verschiedenen Wegen erreicht werden. Es können daher verschiedene Fälle unterschieden werden:

I.

Haben die Glieder eines Polynoms einen oder mehrere Factoren gemein, so trennt man den- oder dieselben heraus, dividirt sämmtliche Glieder des Polynoms durch diese gemeinschaftlichen Factoren, schließt die auf diese Weise dividirten Summanden in eine Klammer ein und setzt endlich vor oder hinter dieselbe die gemeinsamen Factoren.

1. Beispiel.

$$3ax - 4bx + 5cx - 9dx + 11ex - 13fx = ?$$

Sämmtliche Glieder des gegebenen Aggregats haben den Factor x gemein; dividirt man jeden Summanden durch x, so erhält man der Reihe nach:

$$3a - 4b + 5c - 9d + 11e - 13f.$$

Schließt man nun diese durch den gemeinschaftlichen Factor x dividirten Glieder in eine Klammer und setzt vor dieselbe den gemeinschaftlichen Factor x, so geht obiges Polynom in folgendes Product über:

$$x(3a - 4b + 5c - 9d + 11e - 13f).$$

Anmerkung. Will man sich von der Richtigkeit der vorgenommenen Zerfällung überzeugen, so multiplicire man das vor der Klammer stehende Monom (den gemeinschaftlichen Factor) mit dem in derselben befindlichen Polynom nach § 5, II, 6.

2. Beispiel.

$$28abcx - 35cdgx + 56cmnx =$$
$$7cx(4ab - 5dg + 8mn).$$

3. Beispiel.

$$72abcxyz + 63defxyz - 99gxyz =$$
$$9xyz(8abc + 7def - 11g).$$

Zusatz. $a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$. Dieses Beispiel zeigt, daß man eine Summe auch dann in ein Product verwandeln kann, wenn die Glieder keinen Factor gemein haben.

II.

Wenn in einem Polynom nicht alle Glieder einen Factor gemein haben, sondern nur einzelne, so faßt man letztere zusammen und trennt den ihnen gemeinsamen Factor heraus. Hiedurch erhält man häufig ein neues Polynom, dessen Glieder gemeinschaftliche Factoren haben, durch deren Heraustrennung die Verwandlung des gegebenen Polynoms in ein Product ermöglicht wird.

4. Beispiel.

$3ac + 3ad - 5bc - 5bd$. Die Glieder dieses Polynoms haben keinen Factor gemein; aber das erste und zweite Glied besitzen den Factor $3a$ und dem 3. und 4. Glied ist der Factor $5b$ gemein. Trennt man diese Factoren nach I heraus, so erhält man:

$$3a(c + d) - 5b(c + d) \text{ (§ 4, II, 5).}$$

Es ist ersichtlich, daß die Glieder der erhaltenen Summe den Factor $(c + d)$ gemein haben; wird dieser herausgetrennt, so folgt:

$$(c + d)(3a - 5b);$$

die gegebene Summe $3ac - 3ad - 5bc - 5bd$ geht sonach über in das Product:

$$(c + d)(3a - 5b).$$

Anmerkung. Um die Zerfällung zu prüfen, multiplicire man die erhaltenen Producte mit einander. Resultirt die ursprüngliche Summe, so hat man im Verlaufe der Rechnung keinen Fehler gemacht.

5. Beispiel.

$$16c^2 - 36cd - 40cg - 28cf + 63df + 70fg =$$
$$4c(4c - 9d - 10g) - 7f(4c - 9d - 10g) =$$
$$(4c - 9d - 10g)(4c - 7f).$$

6. Beispiel.

$$5ad + 15bd + 20cd + 7ae + 21be + 28ce =$$
$$5d(a + 3b + 4c) + 7e(a + 3b + 4c) =$$
$$(a + 3b + 4c)(5d + 7e).$$

III.

Ist die Anzahl der Glieder des gegebenen Polynoms eine ungerade, so suche man ein Glied so in eine Summe oder Differenz zu verwandeln, daß hiedurch eine gerade Anzahl von Gliedern (nur bei dieser ist das Verfahren unter II) möglich) entsteht. Selbstverständlich muß die Zerlegung eine solche sein, daß sich gemeinschaftliche Factoren ausscheiden lassen.

7. Beispiel.

$$6b^4 + 8b^2c - 8c^2 = ?$$

In diesem Beispiel findet sich unmittelbar kein Factor, der allen Gliedern gemein wäre (den Factor 2 der Coefficienten ausgenommen) und es erscheint daher eine Zerlegung des gegebenen Polynoms in Factoren unthunlich.

Bedenkt man aber, daß

$$8b^2c = 12b^2c - 4b^2c,$$

so ergiebt sich in den beiden ersten Gliedern $6b^2$ und in den beiden letzten $4c$ als gemeinsamer Factor. Man erhält also:

$$6b^4 + 8b^2c - 8c^2 = 6b^4 + 12b^2c - 4b^2c - 8c^2 =$$
$$6b^2(b^2 + 2c) - 4c(b^2 + 2c) =$$
$$(b^2 + 2c)(6b^2 - 4c) =$$
$$(b^2 + 2c)(3b^2 - 2c)2.$$

8. Beispiel.

$$10g^2 + 23gh + 12h^2 =$$
$$10g^2 + 15gh + 8gh\ 12h^2 =$$
$$5g(2g + 3h) + 4h(2g + 3h) =$$
$$(2g + 3h)(5g + 4h).$$

IV.

Die Verwandlung folgender Summen in Producte ergiebt sich aus früher Gelehrtem. Die umsichtige Benützung dieser Formeln wird bei auszuführenden Reductionen wesentliche Dienste leisten.

1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b),$

2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b),$

3) $n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 = (n - 1)(n - 1)$,
4) $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 = (a + b + c)(a + b + c)$,
5) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$,
6) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$,
7) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
8) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
9) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$,
10) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$,
11) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,
12) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
13) $a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$,
14) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Anmerkung. Die Formeln 7) bis 10) werden erhalten, indem man die Ausdrücke $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ u. s. w. durch die Differenz $a - b$ dividirt; dividirt man mit der Summe $(a + b)$ in die Ausdrücke $a^2 - b^2$, $a^3 + b^3$ u. s. w., so resultiren die Formeln 11) bis 14), z. B.

$$
\begin{array}{l}
a - b \mid a^3 - b^3 = a^2 + ab + b^2 \\
\qquad\quad a^3 - a^2b \\
\qquad\quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad a^2b - b^3 \\
\qquad\qquad a^2b - ab^2 \\
\qquad\qquad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad ab^2 - b^3 \\
\qquad\qquad\quad ab^2 - b^3 \\
\qquad\qquad\quad - \quad + \\
\hline
\end{array}
$$

und

$$
\begin{array}{l}
a + b \mid a^3 + b^3 = a^2 - ab + b^2 \\
\qquad\quad a^3 + a^2b \\
\qquad\quad - \quad - \\
\hline
\qquad\qquad - a^2b + b^3 \\
\qquad\qquad - a^2b - ab^2 \\
\qquad\qquad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad ab^2 + b^3 \\
\qquad\qquad\quad ab^2 + b^3 \\
\qquad\qquad\quad - \quad - \\
\hline
\end{array}
$$

Man verwechsle nicht die beiden Ausdrücke $(a - b)^2$ und $a^2 - b^2$.

V.

$$
\begin{array}{rrrr}
(9a + 7b)(2a + 5b) = & 9a & + 7b & \\
 & 2a & + 5b & \\
\hline
 & 18a^2 & + 14ab & \\
 & & + 45ab & + 35b^2 \\
\hline
 & 18a^2 & + 59ab & + 35b^2.
\end{array}
$$

Bedenkt man, daß das erste Glied $18a^2$ dieses geordneten Polynoms durch Multiplication des ersten Gliedes des einen Factors mit dem ersten Glied des andern Factors entstand, das dritte Glied $35b^2$ das Product aus dem zweiten Glied des einen Factors und dem zweiten Glied des andern ist und das zweite Glied $59ab$ endlich gleich ist der algebraischen Summe folgender zwei Producte:

1. Glied des 1. Factors × 2. Glied des 2. Factors
2. „ „ 1. „ × 1. „ „ 2. „

so läßt sich hieraus folgendes Verfahren, Polynome in Factoren zu zerlegen, ableiten:

Man zerlegt die beiden äußeren Glieder des gegebenen Polynoms in je 2 Factoren, benennt 2 hievon äußere und die 2 anderen innere Factoren, multiplicirt diese gegenseitig mit einander und subtrahirt schließlich die Summe beider Producte vom innern Glied. Geht die Subtraction auf, so ist die Zerlegung bewirkt und man setzt alsdann die Summe der beiden äußeren Factoren als den einen, die Summe der beiden innern Factoren als den andern Factor des zu suchenden Products. Ist dies nicht der Fall, so muß eine andere Zerfällung der beiden äußeren Glieder vorgenommen werden. Dies Verfahren gilt zunächst für nicht mehr als dreigliedrige Polynome.

9. Beispiel.

$$18a^2 + 59ab + 35b^2 =$$

$$2a \,.\, 9a \qquad 7b \,.\, 5b$$

$$
\begin{array}{c}
14ab \\
45ab \\
\hline
59ab \\
\hline
-
\end{array}
$$

Also:

$$(2a + 5b)(9a + 7b).$$

Anmerkung. 2a als äußerer Factor wurde mit dem innern Factor 7b multiplicirt; ebenso der innere Factor 9a mit dem äußeren 5b. Das Uebrige der Rechnung ist aus der vorhergehenden Erklärung klar.

10. Beispiel.

$$20a^2 + 56ab + 15b^2 =$$
$$10a \,.\, 2a \qquad 5b \,.\, 3b$$
$$50ab$$
$$6ab$$
$$\overline{56ab}$$
$$+$$

Demnach ist:

$$20a^2 + 56ab + 15b^2 = (10a + 3b)(2a + 5b).$$

11. Beispiel.

$$20a^2 - 39ab + 18bb$$
$$4a \,.\, 5a \qquad -6b \,.\, -3b$$
$$-24ab$$
$$-15ab$$
$$\overline{-39ab}$$
$$+$$

Also ist:

$$20a^2 - 39ab + 18b^2 = (4a - 3b)(5a - 6b).$$

12. Beispiel.

$$9x^2 - 25y^2 =$$
$$3x \,.\, 3x + 5y \,.\, -5y$$
$$15xy$$
$$-15xy$$

Also ist:

$$9x^2 - 25y^2 = (3x - 5y)(3x + 5y).$$

§ 21.

Aufheben von Brüchen.

Die im vorigen § besprochene Zerfällung algebraischer Summen in Factoren ist ein sehr wichtiges Hilfsmittel, Buchstabenausdrücke

in Bruchform zu vereinfachen, sie auf die kürzeste Form, deren sie fähig sind, zu bringen, sie zu **reduciren.**

1. Beispiel.

$$\frac{3ax - 4bx + 5cx}{2fx + 8gx - 9hx} = \frac{x(3a - 4b + 5c)}{x(2f + 8g - 9h)} = \frac{3a - 4b + 5c}{2f + 8g - 9h}.$$

Anmerkung. Enthalten Zähler und Nenner eines Bruches einen und denselben Factor, so kann man denselben, ohne den Werth des Bruches zu ändern, weglassen.

2. Beispiel.

$$\frac{3a^2x + 6ax^2 + 3x^3 - 2a^2y - 4axy - 2x^2y + a^2m + 2amx + mx^2}{3a^2x - 2a^2y + a^2m - 3x^3 + 2x^2y - mx^2} =$$

$$\frac{3x(a^2 + 2ax + x^2) - 2y(a^2 + 2ax + x^2) + m(a^2 + 2ax + x^2)}{a^2(3x - 2y + m) - x^2(3x - 2y + m)} =$$

$$\frac{(a^2 + 2ax + x^2)(3x - 2y + m)}{(a^2 - x^2)(3x - 2y + m)} =$$

$$\frac{a^2 + 2ax + x^2}{a^2 - x^2} =$$

$$\frac{(a + x)(a + x)}{(a + x)(a - x)} =$$

$$\frac{a + x}{a - x}.$$

3. Beispiel.

$$\frac{n^3 - 2n^2}{n^2 - 4n + 4} =$$

$$\frac{n^2(n - 2)}{(n - 2)(n - 2)} =$$

$$\frac{n^2}{n - 2}.$$

4. Beispiel.

$$\frac{5(2a + 5b)}{25a^2 - 4b^2} - \frac{b(342a - b)}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)} + \frac{a + 64b}{(5a - 2b)(2a - 5b)} = ?$$

Da $25a^2 - 4b^2$ das Product von $(5a + 2b)(5a - 2b)$ ist, so ergiebt sich als Generalnenner $(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)$. Bringt man nun sämmtliche Brüche des gegebenen Polynoms auf diesen Hauptnenner, so erhält man:

$$\frac{5(2a + 5b)(2a - 5b) - b(342a - b) + (a + 64b)(5a + 2b)}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)}$$

Löst man hierauf die Klammern im Zähler, so folgt:

$$\frac{20a^2 - 125b^2 - 342ab + b^2 + 5a^2 + 322ab + 128b^2}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)}.$$

Die gleichnamigen Glieder zusammengefaßt, giebt:

$$\frac{25a^2 - 20ab + 4b^2}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)} = \frac{(5a - 2b)(5a - 2b)}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)} = \frac{5a - 2b}{(5a + 2b)(2a - 5b)}.$$

5. Beispiel.

$$\frac{21a - 2a^2}{2(2a^2 - 72)(6a + 9)} - \frac{2(a - 6)}{(9 + 6a)(a + 6)} - \frac{3(2a - 15)}{(4a - 24)(2a + 3)} + \frac{5(2a - 3)}{6a^2 - 216} = ?$$

Trennt man zunächst die in jedem einzelnen Nenner gemeinsamen Factoren heraus, so erhält man der Reihe nach die Nenner:

$$12(a^2 - 36)(2a + 3); \quad 3(3 + 2a)(a + 6); \quad 4(a - 6)(2a + 3); \quad 6(a^2 - 36).$$

Der Umstand, daß in den Nennern die beiden Factoren $(a + 6)$ und $(a - 6)$ auftreten, legt den Gedanken nahe, zu untersuchen, ob diese beiden Factoren sich auch aus andern Gliedern ergeben. Da nun wirklich $a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6)$ ist, so erhält man folgenden Generalnenner: $12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)$. Bringt man nun sämmtliche Glieder des gegebenen Polynoms auf diesen Hauptnenner, so ergiebt sich:

$$\frac{21a - 2a^2 - 8(a - 6)(a - 6) - 9(2a - 15)(a + 6) + 10(2a - 3)(2a + 3)}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{21a - 2a^2 - 8a^2 + 96a - 288 - 18a^2 + 27a + 810 + 40a^2 - 90}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{12a^2 + 144a + 432}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{12(a^2 + 12a + 36)}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{a^2 + 12a + 36}{(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{(a + 6)(a + 6)}{(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{a + 6}{(a - 6)(2a + 3)}.$$

Die in diesem Abschnitt besprochenen Umformungen von Buchstabenausdrücken sind sehr instructive Uebungen; man widme ihnen daher besondere Aufmerksamkeit. Reichliches Material zu solchen Uebungen findet sich in den Sammlungen von „M. Hirsch" und „Hofmann" unter den Ueberschriften „Reductionen". Unter dem Wort Reduction versteht man in der allgemeinen Arithmetik, wie aus dem vorstehenden Abschnitt hervorgeht, einerseits die Verwandlung eines Polynoms in ein Monom, also die algebraische Addition von Brüchen, andererseits die Zurückführung, eines Buchstabenausdrucks auf die kürzeste Form, deren er fähig ist.

Fragen und Aufgaben.

1) Was erhält man, wenn man die halbe Summe und die halbe Differenz der zwei Brüche $\frac{4567}{5899}$ und $\frac{129}{6567}$ addirt oder subtrahirt?

2) Die Summe zweier Zahlen ist 88 und ihre Differenz 8. Wie heißen diese beiden Zahlen?

3) Man reducire folgende Ausdrücke:

$$x - \frac{x + 360}{5}; \quad xy - \frac{3x - 4y + 5z}{7z}; \quad a - \frac{ab + cd + e}{f};$$

$$a + \frac{ab + cd - ef}{gh}; \quad 100 - \frac{50 - 10 + 5 - 3}{7};$$

$$100 + \frac{50 - 10 + 5 - 3}{7}.$$

Fünfter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

§ 22.

Die Gleichungen im Allgemeinen.

I. **Der Begriff „Gleichung“.** Die bestimmte Zahl 10 kann ausgedrückt werden durch $6 + 4$, $16 - 6$, $2 . 5$, $50 : 5$, $3^2 + 1$, $\sqrt{81} + 1$ u. s. w. Ebenso ist die allgemeine Zahl b darstellbar durch $10b - 9b$, $11b + 4b - 14b$, $3 . 6b - (5 . 3b + 2b)$ u. s. f. Die Zahl 10 hat denselben Werth wie die verschiedenen Formen, in denen sie ausgedrückt wurde. Man kann daher schreiben: $10 = 6 + 4$, $10 = 16 - 6$, $10 = 2 . 5$, $10 = 50 : 5$ u. s. w. Ebenso: $b = 10b - 9b$; $b = 11b + 4b - 14b$ u. s. w. Ausdrücke dieser Art heißen Gleichungen.

Eine **Gleichung** ist die Verbindung zweier gleichwerthiger Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen. Die Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen heißen die **Seiten** der Gleichung und zwar nach ihrer Stellung *linke* und *rechte*. Die Theile jeder Seite, welche durch die Zeichen + oder — getrennt sind, heißen die **Glieder** derselben.

II. **Verschiedenheit der Gleichungen.** In der Gleichung $10 = \frac{3 . 4 + 8}{2}$ ist die Aufgabe zu lösen, den Werth des Ausdrucks rechts vom Gleichheitszeichen zu berechnen. Wie dies auszuführen, lehrt die bestimmte Arithmetik. Die Gleichungen $a = a$, ferner $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, endlich $3a - 4b + 6 = 10a + 12b - 7a - 16b + 3 . 2$ enthalten entweder nur Buchstaben, oder Buchstaben in Verbindung mit bestimmten Zahlen. Diese Gleichungen haben zugleich das Eigenthümliche, daß sie Gleichungen bleiben, welchen bestimmten Zahlenwerth man auch für die Buchstaben a und b auf beiden Seiten der Gleichung setzen mag. Gleichungen dieser Art heißen *identische*. In der Gleichung $a + 5 = 17 - a$ kommen zwar auch auf beiden

Seiten Buchstaben und Zahlen vor; allein sie unterscheidet sich doch wesentlich von den 3 vorhergehenden Gleichungen; sie hat nämlich das Charakteristische, daß sie nicht für jeden Werth der darin vorkommenden allgemeinen Zahl a richtig bleibt, sondern nur für einen einzigen, nämlich 6. Gleichungen dieser Art werden algebraische genannt.

1) Jede Gleichung, worin ein Zahlenausdruck sich selbst oder einer bloßen Umformung desselben gleichgesetzt wird, welche daher für jeden beliebigen Zahlenwerth der in ihr vorkommenden Buchstaben richtig bleibt, heißt eine **identische** Gleichung. Solche sind:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

überhaupt alle Formeln.

Gleichungen von der Form $a - 2b + c = a - 2b + c$ werden zuweilen „identische Gleichungen im engern Sinn“ genannt, während Gleichungen, wie $(a + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ als analytische bezeichnet werden.

2) Gleichungen dagegen, deren Gleichheit ihrer Seiten nur eine bedingte ist, heißen **Bestimmungsgleichungen,** algebraische Gleichungen oder kurzweg **Gleichungen.** So ist der Ausdruck $a + 5 = 17 - a$ eine Bestimmungsgleichung, denn die beiden Seiten sind nur unter der Bedingung einander gleich, daß $a = 6$ ist. Die durch die bekannten Zahlen einer Gleichung zu bestimmende unbekannte Zahl derselben nennt man die **Unbekannte** der Gleichung. Man pflegt die unbekannten Zahlen einer Gleichung durch die letzten, die als bekannt anzusehenden durch die ersten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen. Eine Gleichung **auflösen** heißt, den bestimmten Werth der Unbekannten, die sogenannte **Wurzel** der Gleichung, suchen. Derjenige Theil der allgemeinen Arithmetik, der sich mit der Aufstellung und Auflösung von Bestimmungsgleichungen befaßt, heißt **Algebra.**

3) Die Gleichung $ax = p$ enthält die Unbekannte x nur in der ersten Potenz; sie ist daher eine **einfache Gleichung** oder eine **Gleichung vom ersten Grade.**

In der Gleichung $ax^2 + bx = p$ tritt die Unbekannte x außer in der ersten auch in der zweiten Potenz auf; Gleichungen dieser Art werden **Gleichungen des zweiten Grades** oder **quadratische Gleichungen** genannt.

Kubische Gleichungen oder **Gleichungen vom dritten Grad** sind solche, in denen die Unbekannte höchstens in der 3ten Potenz erscheint, also: $ax^3 + bx^2 + cx = p$.

Biquadratische, höhere, ferner reine und gemischte, sodann rationale und irrationale Gleichungen, endlich Zahlen- und Buchstabengleichungen.

III. **Grundsatz, auf dem die Auflösung der Gleichungen beruht.** An jeder Gleichung kann die Richtigkeit folgender Sätze nachgewiesen werden:

Eine Gleichung bleibt unverändert richtig, wenn man beide Seiten um gleich viel vermehrt oder vermindert, mit einer und derselben Zahl multiplicirt, durch eine und dieselbe Zahl dividirt, mit einer und derselben Zahl potenzirt und durch eine und dieselbe Zahl radicirt. Man pflegt diese Sätze in den einen Satz zusammenzufassen: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man an beiden Seiten dieselbe Rechnungsoperation ausführt.

IV. **Sätze über die Umformung von Gleichungen** (Folgerungen aus dem vorigen Grundsatz).

1.

Angenommen, es sei die Gleichung:

$$5x - 9 + 4 = 6x - 9$$

gegeben, in welcher zwei gleiche Glieder mit denselben Vorzeichen auf beiden Seiten stehen. Obigem Grundsatz gemäß muß diese Gleichung richtig bleiben, wenn man diese 2 gleichen Glieder auf beiden Seiten wegläßt, also statt $5x - 9 + 4 = 6x - 9$ schreibt: $5x + 4 = 6x$; denn das Weglassen dieser beiden Glieder $- 9$ von beiden Seiten ist eine stillschweigende Addition der Zahl $+ 9$ zu beiden Seiten. Daher:

Gleiche Glieder, welche auf verschiedenen Seiten mit demselben Vorzeichen stehen, können weggelassen werden.

2.

Es sei die Gleichung: $5x - 3 = 4x + 1$ vorgelegt. Bedenkt man, daß man die Zahl $+ 3$ zur linken Seite addirt und sie mithin um so viel vergrößert, wenn man das Glied $- 3$ von derselben wegläßt, diese gestörte Gleichheit zwischen beiden Seiten aber dadurch

wieder hergestellt werden kann, daß man gleichzeitig, indem man das Glied — 3 von der linken Seite wegläßt, die Zahl + 3 zur rechten Seite addirt, so leuchtet ein, daß man statt $5x - 3 = 4x + 1$, auch $5x = 4x + 1 + 3$ schreiben kann. Läßt man das Glied + 1 von der rechten Seite weg, so subtrahirt man damit die Zahl + 1 von dieser Seite. Subtrahirt man nun auch von der linken Seite gleichzeitig die Zahl 1, so wird offenbar die Gleichheit beider Seiten nicht vernichtet. Man kann also schreiben: $5x - 3 - 1 = 4x$ statt: $5x - 3 = 4x + 1$. Endlich kann man auch $5x - 4x = 1 + 3$ statt $5x - 3 = 4x + 1$ setzen, welche Umformung ebenso wie die vorigen auf obigem Grundsatz beruht. Wir fassen das unter 2) Gesagte in den Satz zusammen:

Man kann Glieder beliebig von der einen Seite einer Gleichung auf die andere bringen, wenn man deren Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt. Diese Operation nennt man die **Transposition** der Glieder. Es wird in der Regel so transponirt, daß die mit den Unbekannten versehenen Glieder (die unbekannten Glieder) auf die linke Seite, die bekannten auf die rechte Seite zu stehen kommen. Eine Gleichung ist „auf Null gebracht" (reducirt), wenn alle Glieder derselben auf einer Seite stehen, also: $5x - 4x - 3 - 1 = 0$.

3.

Die Gleichung $5x - 3 = 4x + 1$ geht dadurch, daß man beide Seiten derselben mit -1 multiplicirt, über in: $-5x + 3 = -4x - 1$ und hieraus folgern wir:

Man kann die Vorzeichen sämmtlicher Glieder einer Gleichung in die entgegengesetzten verwandeln.

4.

In der Gleichung:

$$3(5x - 3) - 2(3x + 2) = 4(x + 2) - 1$$

kommen Klammern vor. Werden dieselben gelöst, so erhält man:

$$15x - 9 - 6x - 4 = 4x + 8 - 1.$$

Transponirt man nun nach IV, 2 dieses §, so folgt:

$$15x - 6x - 4x = 8 - 1 + 9 + 4.$$

Da nun $15x - 6x - 4x = 5x$ und $8 - 1 + 9 + 4 = 20$ ist, so erhält man durch Zusammenfassen der gleichnamigen Glieder:

$$5x = 20.$$

Läßt man den Coefficienten von x, nämlich 5, von der linken Seite weg, so wird hiedurch diese Seite durch 5 dividirt. Um die Gleichheit beider Seiten nicht zu verletzen, muß auch die rechte Seite durch 5 dividirt werden; auf diese Weise erhält man:

$$x = \frac{20}{5} = \mathbf{4}, \text{ statt: } 5x = 20. \text{ Also:}$$

Ein Glied einer Gleichung kann dadurch von seinem Coefficienten befreit werden, daß man die ganze Gleichung durch denselben dividirt.

5.

Die Gleichung:

$$\frac{19 - x}{2} + 4 = \frac{39 - x}{3}$$

enthält Nenner. Transponirt man zunächst, so ergiebt sich:

$$\frac{19 - x}{2} - \frac{39 - x}{3} = -4.$$

Da eine Gleichung unverändert richtig bleibt, wenn man beide Seiten derselben mit einer und derselben Zahl multiplicirt, so kann die vorgelegte Gleichung mit dem Generalnenner ihrer Brüche, nämlich mit 6, multiplicirt werden, ohne daß die zwischen beiden Seiten bestehende Gleichheit vernichtet wird. Hiedurch geht obige Gleichung über in:

$$3(19 - x) - 2(39 - x) = -24.$$

Löst man nun die Klammern und faßt die gleichnamigen Glieder zusammen, so folgt:

$$57 - 3x - 78 + 2x = -24$$

$$-x = -3 \text{ (mit } -1 \text{ multiplicirt)}$$

$$x = \mathbf{3}.$$

Demnach:

Brüche, die in einer Gleichung vorkommen, können dadurch beseitigt werden, daß man die ganze Gleichung mit dem Generalnenner dieser Brüche multiplicirt.

6.

In der Gleichung: $\sqrt{x} + 2 = 3$ steht die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen. Läßt man das Wurzelzeichen von der linken Seite weg, so

potenzirt man dieselbe stillschweigend mit 2; um die hiedurch aufgehobene Gleichheit beider Seiten wieder herzustellen, muß offenbar auch die rechte Seite mit 2 potenzirt werden. Also:

$$\sqrt{x + 2} = 3$$
$$x + 2 = 9$$
$$x = 7.$$

Aus diesem Beispiel ziehen wir den Satz:

Steht die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen, so fällt dasselbe weg, indem man beide Seiten der Gleichung zum Wurzelexponenten potenzirt.

7.

In der Gleichung:

$$nx - amn + m(b - x) = d - mnx.$$

treten Buchstaben auf. Löst man die Klammer und transponirt, so folgt:

$$nx - amn + mb - mx = d - mnx,$$
$$nx - mx + mnx = d + amn - bm.$$

Scheidet man den gemeinsamen Factor x aus, so resultirt:

$$x(n - m + mn) = d + amn - bm$$

und hieraus
$$x = \frac{d + amn - bm}{n - m + mn}.$$

In Vorstehendem wurde das Verfahren, das bei der Auflösung von Gleichungen einzuschlagen ist, entwickelt und begründet. Es besteht, kurz und bündig zusammengefaßt, darin, daß man:

1) Die vorgelegte Gleichung von den Klammern, Nennern und Wurzeln befreit, welche die Unbekannte enthalten, daß man sie **reducirt.** Die Klammern werden dadurch gelöst, daß man die an ihnen angedeutete Rechnung vollzieht; die Nenner beseitigt man durch Multiplication sämmtlicher Glieder der Gleichung mit dem Generalnenner aller Brüche; um endlich eine in einer Gleichung vorhandene Wurzel fortzuschaffen, isolirt man dieselbe von allen übrigen Gliedern durch Transposition und potenzirt hierauf beide Seiten der Gleichung auf den Grad des Wurzelexponenten.

2) Die reducirte Gleichung **ordnet,** indem man die unbekannten Glieder auf die eine, die bekannten auf die andere Seite

schafft und die gleichnamigen Glieder zusammenzieht, resp. den gemeinsamen Factor x ausscheidet.

3) Den **Coefficienten** der Unbekannten durch Division der ganzen Gleichung mit demselben **wegschafft.**

A.

Gleichungen des ersten Grades.

I.

Mit einer Unbekannten.

§ 23.

Auflösung gegebener Gleichungen.

Jede Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten tritt, gehörig reducirt und geordnet, in der Form: $ax = b$ auf, woraus $x = \frac{b}{a}$ ist. Es reichen daher die im vorigen § entwickelten Regeln in Verbindung mit den Sätzen der vier ersten Abschnitte, namentlich mit denen des vierten, zur Auflösung derartiger Gleichungen vollkommen aus. Gleichwohl sollen noch einige Aufgaben dieser Art hier ihre Auflösung finden, um zu zeigen, wie, je nach der Beschaffenheit des vorliegenden Beispiels, die früheren Lehren am zweckmäßigsten angewendet werden.

1.

Gleichungen mit bestimmten Zahlen.

1. Beispiel.

$$\frac{5x - 3}{9} + 4 = \frac{6x + 4}{5} - \frac{51 - x}{45}$$

$$25x - 15 + 180 = 54x + 36 - 51 + x$$

$$-30x = -180$$

$$30x = 180$$

$$x = 6.$$

Anmerkung. Man beachte besonders den Einfluß, den der Wegfall des Divisionsstriches auf die Zeichen des Dividendus hat, wenn vor ihm ein — steht (§ 19, II, Anmerkung).

Es ist räthlich, die Glieder einer Gleichung vor oder mit dem Transponiren so viel wie möglich zusammenzuziehen.

Um die Auflösung einer Gleichung auf ihre Richtigkeit zu prüfen, substituirt man den für x gefundenen Werth in die ursprüngliche Gleichung. Wird hiedurch aus ihr eine identische Gleichung, so ist die Auflösung richtig, also:

$$\frac{5 \cdot 6 - 3}{9} + 4 = \frac{6 \cdot 6 + 4}{5} - \frac{51 - 6}{45}$$

$$\frac{27}{9} + 4 = \frac{40}{5} - \frac{45}{45}$$

$$3 + 4 = 8 - 1$$

$$\mathbf{7 = 7.}$$

2. Beispiel.

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} - \frac{5x}{6} = 2x - 60 - \frac{x}{15}.$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} - \frac{5x}{6} - 2x + \frac{x}{15} = -60$$

$$-x = -60$$

$$\mathbf{x = 60.}$$

Anmerkung. In dieser Gleichung wurden die Glieder derselben vor der Wegschaffung der Brüche zusammengezogen, ein Verfahren, das die Auflösung der Gleichungen wesentlich erleichtert und abkürzt.

3. Beispiel.

$$\frac{3 - 4x}{x + 2} = \frac{12 - 6x}{x - 2} - 10 + \frac{12x^2 - 6}{x^2 - 4}.$$

Da der Hauptnenner $x^2 - 4$ heißt, so erhält man zunächst:

$$(3 - 4x)(x - 2) = (12 - 6x)(x + 2) - 10(x^2 - 4) + 12x^2 - 6,$$

und hierauf:

$$3x - 4x^2 - 6 + 8x = 12x + 24 - 6x^2 - 12x - 10x^2 + 40 + 12x^2 - 6,$$

sodann $\qquad 11x = 64$

endlich $\qquad \mathbf{x = 5\tfrac{9}{11}.}$

2.

Gleichungen mit allgemeinen Zahlen.

4. Beispiel.

$$\frac{ab^2 + abd - abx}{d - c} = ax - ac.$$

Die ganze Gleichung mit d — c multiplicirt, giebt:

$$ab^2 + abd - abx = ax(d - c) - ac(d - c).$$

Die Klammern gelöst:

$$ab^2 + abd - abx = adx - acx - acd + ac^2.$$

Transponirt:

$$acx - abx - adx = ac^2 - ab^2 - acd - abd.$$

Den gemeinsamen Factor x herausgetrennt:

$$x(ac - ab - ad) = ac^2 - ab^2 - acd - abd.$$

Mithin:

$$x = \frac{ac^2 - ab^2 - acd - abd}{ac - ab - ad}$$

und, wenn man die Division ausführt:

$$x = c + b.$$

Anmerkung. Bei Buchstabengleichungen handelt es sich nicht allein um die Auflösung derselben, sondern auch um die Zurückführung des Resultats auf die kürzeste Form, deren es fähig ist.

5. Beispiel.

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2(a - b)} - \frac{a^2x + b^3}{a^2} = 2b + \frac{b^2}{a} \text{ (Heis.)}$$

Nach § 20, IV, 9 ist $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$. Setzt man daher für $a^4 - b^4$ das Product $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ und multiplicirt zugleich mit a^2, so erhält man:

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 - a^2x - b^3 = 2a^2b + ab^2,$$

oder: $$a^2x = a^3 - a^2b$$

mithin: $$x = a - b.$$

6. Beispiel.

$$\frac{3abc}{a + b} + \frac{a^2b^2}{(a + b)^3} + \frac{(2a + b)b^2x}{a(a + b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}.$$ (M. Hirsch).

Dividirt man mit den einzelnen Nennern in den Generalnenner, der $a(a + b)^3$ ist und multiplicirt sämmtliche Zähler mit dem erhaltenen Quotienten, so ergiebt sich:

$$3a^2bc(a + b)^2 + a^3b^2 + (2a + b)(a + b)b^2x = 3ac(a + b)^3x + b(a + b)^3x.$$

Transponirt, mit (— 1) multiplicirt und x herausgetrennt:

$$[3ac(a + b)^3 + b(a + b)^3 - (2a + b)(a + b)b^2]x = 3a^2bc(a + b)^2 + a^3b^2.$$

Sämmtliche Glieder der linken Seite haben den Factor $(a + b)$ und die der rechten Seite ab gemein; diese herausgetrennt, kommt:

$$(a + b)[3ac(a + b)^2 + b(a + b)^2 - (2a + b)b^2]x = ab[3ac(a + b)^2 + a^2b].$$

Ausmultiplicirt:

$$(a + b)[3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b + 2ab^2 + b^3 - 2ab^2 - b^3]x = ab[3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b].$$

Zusammengefaßt:

$$(a + b)(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)x = ab(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b),$$

folglich:

$$x = \frac{ab(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)}{(a + b)(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)}$$

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

3.

Gleichungen mit Wurzelausdrücken.

7. Beispiel.

$$\sqrt{16x^2 - 31} + 1 = 4x.$$

Man trennt zunächst den Wurzelausdruck durch Transposition von den übrigen Gliedern, wodurch sich ergiebt:

$$\sqrt{16x^2 - 31} = 4x - 1.$$

Hierauf potenzirt man beide Seiten mit 2, also:

$$16x^2 - 31 = (4x - 1)^2$$

oder $$16x^2 - 31 = 16x^2 - 8x + 1$$

oder $$8x = 32$$

$$x = 4.$$

8. Beispiel.

$$12x - 3\sqrt{25x^2 - 20x - 65} = 15 - 3x.$$

Bringt man die Wurzelgröße allein auf eine Seite, so erhält man:

$$15x - 15 = 3\sqrt{25x^2 - 20x - 65}.$$

Beide Seiten mit 2 potenzirt:

$$(15x - 15)^2 = 9(25x^2 - 20x - 65).$$

Die Klammern aufgelöst:

$$225x^2 - 450x + 225 = 225x^2 - 180x - 585.$$

Transponirt und zusammengezogen:

$$-270x = -810$$

$$270x = 810$$

$$x = 3.$$

9. Beispiel.

$$5x + 1 = 4(2 + x) + \sqrt{49 - x\sqrt{x^2 - 56}}.$$

Die Wurzelgröße isolirt:

$$x - 7 = \sqrt{49 - x\sqrt{x^2 - 56}}.$$

Beide Seiten quadrirt:

$$(x - 7)^2 = 49 - x\sqrt{x^2 - 56}.$$

Klammer gelöst:

$$x^2 - 14x + 49 = 49 - x\sqrt{x^2 - 56}.$$

Zusammengefaßt und den Wurzelausdruck isolirt:

$$x\sqrt{x^2 - 56} = 14x - x^2.$$

Mit 2 potenzirt:

$$x^2(x^2 - 56) = (14x - x^2)^2.$$

Klammern gelöst:

$$x^4 - 56x^2 = 196x^2 - 28x^3 + x^4.$$

Zusammengezogen:

$$28x^3 - 252x^2 = 0.$$

Die ganze Gleichung durch den gemeinsamen Factor x^2 dividirt:

$$28x = 252$$

$$x = 9.$$

10. Beispiel.

$$\sqrt{x - 6} + \sqrt{x + 5} = 11.$$

Mit 2 potenzirt:

$$x - 6 + 2\sqrt{(x - 6)(x + 5)} + x + 5 = 121.$$

Vereinfacht und Klammer gelöst:

$$2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 30} = 121.$$

Den Wurzelausdruck auf eine Seite allein geschafft:

$$2\sqrt{x^2 - x - 30} = 122 - 2x.$$

Mit 2 potenzirt:

$$4(x^2 - x - 30) = (122 - 2x)^2.$$

Klammern gelöst:

$$4x^2 - 4x - 120 = 14884 - 488x + 4x^2.$$

Transponirt und zusammengezogen:

$$484x = 15004$$

$$x = 31.$$

Anmerkung. Die Gleichungen veranlassen durch die verschiedene Form, in die sie eingekleidet werden können, zu einer Wiederholung aller Regeln der vier Species, der Potenzen, der Wurzeln, der Reductionen, und somit zu einer wirksamen Einübung derselben. Vielfache Uebung in der Auflösung von Gleichungen ist daher dringend anzurathen. Material hiezu findet sich in „M. Hirsch“ und „Hofmann“ unter den Ueberschriften: Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§ 24.

Aufstellung der Gleichungen für Textaufgaben und Auflösung derselben.

Soll eine in Worten gegebene Aufgabe durch eine Bestimmungsgleichung gelöst werden, so hat man zunächst die Angaben der Aufgabe in die mathematische Sprache zu übersetzen. Zu dem Zweck nimmt man die zu suchende Zahl als gefunden an, bezeichnet sie mit x und vollzieht an derselben andeutungsweise alle die Verknüpfungen, welche die Aufgabe vorschreibt. Hiedurch muß man zwei Ausdrücke zu erhalten suchen, welche einander gleichgesetzt werden können. Die aus ihnen gebildete Bestimmungsgleichung wird nach den Regeln des § 22 aufgelöst. Aus ihr resultirt die zu suchende Zahl. Wie man ersieht, lassen sich für die Aufstellung der Bestimmungsgleichung einer Aufgabe keine bestimmten Regeln geben; sie ist von der Beschaffenheit der vorliegenden Aufgabe bedingt und Sache der Ueberlegung des Rechnenden. Um zu zeigen, wie bei der Aufstellung von Bestimmungsgleichungen für Textaufgaben zu verfahren ist, sollen im Nachfolgenden einige Beispiele ausführlich erörtert werden.

I. Aufgaben, für die man vom früheren Rechnen her keine bestimmte Auflösungsmethode im Gedächtniß hat.

1. Beispiel.

Wenn man eine gewisse Zahl mit 3 multiplicirt, zu dem Product 8 addirt, die Summe durch 4 dividirt, endlich von dem Quotienten 5 subtrahirt, so erhält man 15; wie heißt die Zahl?

Aufstellung der Gleichung.

Wenn man

die zu suchende Zahl	x
mit 3 multiplicirt	$3x$
zum Product 8 addirt	$3x + 8$
die Summe durch 4 dividirt	$\frac{3x + 8}{4}$
von dem Quotienten 5 subtrahirt	$\frac{3x + 8}{4} - 5$
so erhält man 15	$\frac{3x + 8}{4} - 5 = 15.$

Auflösung der aufgestellten Gleichung.

$$\frac{3x + 8}{4} - 5 = 15$$

$$3x + 8 - 20 = 60$$

$$3x = 72$$

$$x = 24.$$

Anmerkung. Hier ist der Ort, den Unterschied zwischen der algebraischen und der eigentlichen arithmetischen Auflösung einer Aufgabe aus einander zu setzen. Lösen wir zunächst das vorgelegte Beispiel nach dem arithmetischen Verfahren, um den bezeichneten Unterschied deutlich wahrzunehmen.

Die Zahl 15 ist dadurch entstanden, daß man von einer andern Zahl 5 subtrahirte; diese Zahl ist demnach 15 + 5 = 20. Diese Zahl 20 ist nach der Aufgabe der Quotient einer Zahl, dessen Divisor 4 beträgt; folglich ist der Dividendus 4 . 20 = 80. Die Zahl 80 entstand aus einer andern Zahl durch Addition der Zahl 8 zu ihr; weshalb diese andere Zahl 80 — 8 = 72 ist. Da nun 72 nach der Aufgabe das Dreifache der gedachten Zahl ist, so muß diese selbst $\frac{72}{3} = 24$ sein.

Vergleicht man nun diese beiden Auflösungsweisen mit einander, so ergiebt sich folgender Unterschied:

Bei dem arithmetischen Verfahren schreitet man vom Bekannten zum Unbekannten vorwärts, setzt das gesuchte Resultat der Aufgabe aus den gegebenen bekannten Daten zusammen, geht synthetisch zu Werke; bei dem algebraischen Verfahren dagegen nimmt man die vorgelegte Aufgabe als gelöst, die zu suchende Zahl als gefunden an, bezeichnet deshalb die Unbekannte und führt sie gleich mit in die Rechnung ein, man stellt eine Bestimmungsgleichung auf, die man sodann auflöst (Analytische Auflösungsweise).

Es ist sehr geistbildend, die durch Gleichungen gelösten Aufgaben auch nach dem arithmetischen Verfahren aufzulösen. **Beide Verfahrungsarten müssen daher geübt werden.**

2. Beispiel.

Wenn man eine gewisse Zahl mit a multiplicirt, zum Product b addirt, die Summe durch c dividirt, den Quotienten um d vermehrt, das Resultat durch e dividirt, von dem nunmehrigen

Quotienten f subtrahirt und endlich diesen Rest mit g multiplicirt, so erhält man die gesuchte Zahl; wie heißt sie?

Aufstellung der Gleichung.

Wenn man

die unbekannte Zahl	x
mit a multiplicirt	ax
zum Product b addirt	$ax + b$
die Summe durch c dividirt	$\frac{ax + b}{c}$
zum Quotienten d addirt: $\frac{ax+b}{c} + d =$	$\frac{ax + b + cd}{c}$
das Resultat durch e dividirt: $\frac{\frac{ax+b+cd}{c}}{e} =$	$\frac{ax + b + cd}{ce}$
vom Quotienten f subtrahirt: $\frac{ax+b+cd}{ce} - f =$	$\frac{ax+b+cd-cef}{ce}$
diesen Rest mit g multiplicirt:	$\frac{ax+b+cd-cef}{ce} \cdot g$
so erhält man x	$\frac{ax+b+cd-cef}{ce} \cdot g = x.$

Auflösung.

$$\frac{ax + b + cd - cef}{ce} \cdot g = x$$

$$agx + bg + cdg - cefg = cex$$

$$agx - cex = - bg - cdg + cefg$$

$$cex - agx = bg + cdg - cefg$$

$$(ce - ag)x = (b + cd - cef)g$$

$$x = \frac{(b + cd - cef)g}{ce - ag}.$$

Würde man während der Aufstellung obiger Gleichung die einzelnen Ausdrücke nicht reducirt haben, so hätte man folgende Form für die Gleichung erhalten:

$$\left(\frac{\frac{ax + b}{c} + d}{e} - f\right) \cdot g = x.$$

Anmerkung. Die gefundene Formel $x = \frac{(b + cd - cef)g}{ce - ag}$ enthält die Regel, wie man zu verfahren hat, um obige Aufgabe für jeden besondern Werth, den man den allgemeinen Zahlen a, b, c, d, e, f, g giebt, aufzulösen. Nimmt man z. B. $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 7$, $e = 3$, $f = 2$ und $g = 1\frac{1}{3}$ an, so ist:

$$x = \frac{(b + cd - cef)g}{ce - ag} = \frac{(5 + 4 \,.\, 7 - 4 \,.\, 3 \,.\, 2) \,.\, 1\frac{1}{3}}{4 \,.\, 3 - 6 \,.\, 1\frac{1}{3}} =$$

$$\frac{(5 + 28 - 24) \,.\, 1\frac{1}{3}}{12 - 8} = \frac{12}{4} = 3.$$ Die gedachte Zahl heißt also 3. —

Mit Hilfe der allgemeinen **Auflösungsformel** einer Aufgabe können alle möglichen Aufgaben derselben Art, die in bestimmten Zahlen ausgedrückt sind, gelöst werden; man hat nur die besonderen Werthe in die allgemeine Formel zu substituiren (§ 1). Die allgemeine Auflösung von Aufgaben ist besonders instructiv; man pflege sie angelegentlichst.

3. Beispiel.

Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um die Hälfte, scheidet aber von demselben alle Jahre 2000 Mark zu seinem Unterhalt aus. Dadurch hat sich das anfängliche Vermögen nach 3 Jahren um 1000 Mark über das $2\frac{1}{2}$fache desselben vermehrt. Wie groß war das Vermögen anfangs?

Aufstellung der Gleichung.

Der Kaufmann hatte anfangs ein Vermögen, in Mark ausgedrückt x

Behält hievon, nach Vermehrung um $\frac{1}{2}$ und nach Ausscheidung des Verbrauchs für's I. Jahr, am Ende des I. Jahres $\frac{3x}{2} - 2000 =$ . . . $\frac{3x - 4000}{2}$

Davon bleiben, nach Vermehrung desselben um $\frac{1}{2}$ und nach Wegnahme des Bedarfs für's II. Jahr, am Ende des II. Jahrs $\frac{3}{2}\left(\frac{3x - 4000}{2}\right) - 2000 =$ . . . . $\frac{9x - 20000}{4}$

Davon bleiben, nach Vermehrung desselben um $\frac{1}{2}$ und nach Ausscheidung des Verbrauchs

für's III. Jahr, am Ende des III. Jahrs

$$\frac{3}{2}\left(\frac{9x-20000}{4}\right)-2000=\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \frac{27x-76000}{8}$$

Dieses Vermögen ist um 1000 Mark größer als

das $2\frac{1}{2}$fache des ursprünglichen, also: $\frac{27x-76000}{8}=2\frac{1}{2}x+1000.$

Auflösung der Gleichung.

$$\frac{27x-76000}{8}=\frac{5x}{2}+1000$$

$$x = 12000.$$

II. Aufgaben der Zinsrechnung.

4. Beispiel.

Es soll die gegenseitige Abhängigkeit der vier Größen: Kapital, C, Procente (Zinsfuß), p, Zeit, T, und Zinsen, Z, durch eine Gleichung ausgedrückt werden!

Das Kapital 100 (Mark, Thaler) trägt in der Zeiteinheit (in 1 Jahr, 1 Monat) die Zinsen p, mithin das Kapital C (600, 50 . .) in dieser Zeiteinheit so viel mal p als 100 in C enthalten ist, also $\frac{C}{100}\cdot p$ und in der Zeit T (6 Jahre, 6 Monate, in T Zeiteinheiten) die Zinsen $\frac{C}{100}\cdot p\cdot T=\frac{CpT}{100}$. Die verlangte Gleichung ist mithin:

$$Z=\frac{CpT}{100}.$$

Anmerkung. Die Zinsen eines Kapitals sind abhängig von dem angelegten Kapital, den Procenten, zu welchen es aussteht und der Zeit, während der es ausgeliehen ist, sie sind die Wirkung von diesen 3 Ursachen. Jede Größe, die von einer oder mehreren Größen abhängig ist, mit ihnen in einem gewissen Zusammenhang steht, sodaß eine Aenderung dieser letzteren auch eine Aenderung der ersteren bewirkt, wird eine **Function** dieser anderen Größe oder Größen genannt. Der Zinsertrag ist also eine Function von dem Kapital, den Procenten und der Zeit. Ist eine Größe eine Function von mehreren anderen Größen, so ist auch umgekehrt jede der letzteren Größen eine Function von allen übrigen.

Daraus folgt, daß mit der einen Gleichung, die man zwischen mehreren zusammengehörigen, durch allgemeine Zahlen ausgedrückten Größen aufgestellt hat, zugleich die Auflösung von so viel Aufgaben gegeben ist, als die Gleichung verschiedene Größen enthält. Man hat nur nöthig, die aufgestellte Gleichung für jede der verschiedenen Größen aufzulösen, sie auf dieselben zu reduciren. Aus obiger Gleichung

$$1)\quad Z = \frac{CpT}{100}$$

ergeben sich mithin folgende Gleichungen:

$$2)\quad C = \frac{100Z}{pT}$$

$$3)\quad p = \frac{100Z}{CT}$$

$$4)\quad T = \frac{100Z}{Cp}.$$

Man drücke diese 4 Gleichungen in Worten aus!

5. Beispiel.

Es sollen Gleichungen aufgestellt werden, die den Zusammenhang unter den Größen:

Angelegtes Kapital	C
Procent (Zinsfuß)	p
Zeit, während C steht	T
Kapital und einfacher Zins in T .	C′

ausdrücken!

Nach Beispiel 4 repräsentirt der Ausdruck $\frac{CpT}{100}$ die Zinsen in T Zeiteinheiten des Kapitals C zu p Procent; mithin stellt der Ausdruck $C + \frac{CpT}{100}$ das Kapital sammt den Zinsen desselben in T Zeiteinheiten dar. Man erhält folglich, da diese Größe durch C′ bezeichnet werden soll, die Gleichung:

$$1)\quad C' = C + \frac{CpT}{100}.$$

Will man nun diese Gleichung für die drei anderen Größen auflösen, so schaffe man zunächst den Nenner weg; hiedurch erhält man:

$$100 \,.\, C' = 100 \,.\, C + CpT.$$

Die beiden Seiten vertauscht:

$$100C + CpT = 100C'.$$

C herausgetrennt:

$$C(100 + pT) = 100C',$$

und hieraus:

$$2)\ C = \frac{100C'}{100+pT}.$$

Aus der Gleichung:

$$100C + CpT = 100C'$$

erhält man:

$$CpT = 100C' - 100C$$

und hieraus:

$$3)\ p = \frac{100C' - 100C}{CT}$$

und

$$4)\ T = \frac{100C' - 100C}{Cp}.$$

Die verlangten Gleichungen sind also:

$$1)\ C' = C + \frac{CpT}{100}$$

$$2)\ C = \frac{100C'}{100 + pT}$$

$$3)\ p = \frac{100C' - 100C}{CT},\ \text{d. i.}\ \frac{100(C' - C)}{CT}$$

$$4)\ T = \frac{100C' - 100C}{Cp},\ \text{d. i.}\ \frac{100(C' - C)}{Cp}.$$

6. Beispiel.

A hat vor T Jahren C Mark und B vor T' Jahren C' Mark ausgeliehen und zwar B um p % höher als A. A hat m mal so viel Zinsen erhalten als B. Zu wie viel % hat A sein Kapital ausgeliehen?

A hat sein Geld ausgeliehen, in % ausgedrückt, zu . . x

B hat sein Geld mithin ausgeliehen, in % ausgedrückt, zu (x + p)

Die Zinsen des A sind . . . . $\frac{CxT}{100}$

Die Zinsen des B sind $\frac{C'T'(x + p)}{100} = . . \frac{C'T'x + C'T'p}{100}$.

Da nun die Zinsen des A m mal so groß sind, als die des B, so ergiebt sich:

$$\frac{CxT}{100} = \frac{(C'T'x + C'T'p)m}{100}$$

oder

$$CxT = C'T'mx + C'T'pm$$
$$CxT - C'T'mx = C'T'mp$$
$$x = \frac{C'T'mp}{CT - C'T'm}.$$

III. Aufgaben der Theilungsrechnung.

7. Beispiel.

Eine Summe s soll in 4 Theile getheilt werden, die sich wie die Zahlen m, n, p, q verhalten!

Die vier Theile sollen sich wie m, n, p, q verhalten, d. h. wie 1, $\frac{n}{m}, \frac{p}{m}, \frac{q}{m}$.

Ist daher die Zahl, die den 1. Theil ausdrückt $= x$

so ist " " " " 2. " " $\frac{n}{m} . x = \frac{nx}{m}$

und " " " " 3. " " $\frac{p}{m}x = \frac{px}{m}$

" " " " " 4. " " $\frac{q}{m}x = \frac{qx}{m}$.

Da diese vier Theile zusammen = s sein müssen, so ergiebt sich die Gleichung:

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} + \frac{qx}{m} = s.$$

Die Nenner weggeschafft:

$$mx + nx + px + qx = ms.$$

x herausgetrennt:

$$x(m + n + p + q) = ms,$$

mithin x oder

der erste Theil, $x = \frac{ms}{m + n + p + q}$.

„ zweite „ $\frac{nx}{m} = \frac{n}{m} \cdot \frac{ms}{m + n + p + q} = \frac{ns}{m + n + p + q}$.

„ dritte „ $\frac{px}{m} = \frac{p}{m} \cdot \frac{ms}{m + n + p + q} = \frac{ps}{m + n + p + q}$.

„ vierte „ $\frac{qx}{m} = \frac{q}{m} \cdot \frac{ms}{m + n + p + q} = \frac{qs}{m + n + p + q}$.

Anmerkung. Wird eine Zahl so in zwei oder mehrere Theile zerlegt, daß sich die Theile wie zwei oder mehrere gegebene Zahlen verhalten, so sagt man: die Zahl werde nach einem gegebenen Verhältniß getheilt. Es geschieht dies, indem man die Zahl durch die Summe der Verhältnißzahlen dividirt und den erhaltenen Quotienten mit jeder einzelnen Verhältnißzahl multiplicirt. Die Resultate der vorhergehenden Aufgabe drücken dies klarer aus, wenn man sie folgendermaßen schreibt:

1. Theil $x = \frac{s}{m + n + p + q} \cdot m$

2. Theil $= \frac{s}{m + n + p + q} \cdot n$ u. s. w.

8. Beispiel.

Eine Summe s soll unter 5 Personen so vertheilt werden, daß sich verhalten die Antheile von:

$$A : B = m : n$$
$$B : C = n' : o$$
$$C : D = o' : p$$
$$D : E = p' : q!$$

Ist die Zahl, welche die Größe des Theiles A ausdrückt . $= x$,

so ist die Zahl für die Größe des Theiles B . . . $= \frac{nx}{m}$

und „ „ „ „ „ „ „ C. . . . . $= \frac{nox}{mn'}$

„ „ „ „ „ „ „ „ D. . . . . $= \frac{nopx}{mn'o'}$

„ „ „ „ „ „ „ „ E. . . . $= \frac{nopqx}{mn'o'p'}$,

folglich:

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{nox}{mn'} + \frac{nopx}{mn'o'} + \frac{nopqx}{mn'o'p'} = s.$$

Im Uebrigen vergleiche man das Beispiel Nr. 7.

IV. Aufgaben der Mischungsrechnung.

9. Beispiel.

Es ist durch Gleichungen auszudrücken der Zusammenhang zwischen den Mengen m und n zweier verschiedener Sorten einer Waare, den Preisen p und q derselben und dem Durchschnittspreis d der Waare!

Der Preis der Gewichtseinheit des Gemenges ist in Mark ausgedrückt . . . . $= d$
Werth von m solcher Gewichtseinheiten der ersten Sorte, in Mark ausgedrückt . . . . $= mp$
Werth der zweiten Sorte unter derselben Bedingung . $= nq$
Werth der beiden Sorten zusammen . . . $= mp + nq$
Werth des Gemenges . . . . $= (m + n)d$
Mithin:

$$d(m + n) = mp + nq,$$

folglich:

$$1)\quad d = \frac{mp + nq}{m + n}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$2)\quad p = \frac{d(m + n) - nq}{m}$$

$$3)\quad m = \frac{n(q - d)}{d - p}.$$

In Gleichung 1) wird der Mittelpreis gesucht, in Gleichung 2) eine der beiden Qualitäten und in Gleichung 3) eine der beiden Quantitäten. Man drücke diese 3 Gleichungen in Worten aus!

10. Beispiel.

Jemand will aus zwei verschiedenen Sorten einer Waare, von der 1 Pfund der bessern Sorte p, 1 Pfund der schlechteren q Mark kostet, s Pfund so mengen, daß 1 Pfund des Gemisches d Mark kostet. Wie viel muß man von jeder Sorte nehmen?

Ist die Zahl der Pfunde, die man von der bessern Sorte nimmt . . . . x,
so ist die von der schlechteren Sorte . . . . . $s - x$,
Werth des Gemenges vermöge der bessern Sorte . . . $p \cdot x$
„ „ „ „ „ schlechtern „ . . $q(s - x)$
Gesammtwerth des Gemenges . . . . . $px + q(s - x)$
„ „ „ infolge des Mittelpreises . . ds.

Da nun die Summe der Werthe von den einzelnen Theilen dem Werthe der Mischung gleich sein muß, so erhält man:

$$px + q(s - x) = ds$$

oder
$$px + qs - qx = ds$$

oder
$$x(p - q) = ds - qs$$

folglich
$$x = \frac{(d - q)s}{p - q}.$$

So viel muß man von der bessern Sorte nehmen; von der schlechteren also:

$$s - \frac{(d - q)s}{p - q} = \frac{(p - d)s}{p - q}.$$

11. Beispiel.

Es soll eine 2,75 Kilogramm schwere Legirung vom Feingehalt 0,865 bereitet werden. Hiezu benutzt man 1,25 Kilogramm einer Legirung vom Feingehalt 0,725. Wie groß muß der Feingehalt des noch hinzuzusetzenden Metalls sein?

Ist der Feingehalt der hinzuzusetzenden 1,5 Kilogramm x, so erhält man die Gleichung:

$$1{,}5x + 1{,}25 \cdot 0{,}725 = 2{,}75 \cdot 0{,}865$$

oder
$$1{,}5x + 0{,}90625 = 2{,}37875$$

oder
$$1{,}5x = 1{,}47250$$

also
$$x = \frac{1{,}4725}{1{,}5}$$

$$x = 0{,}981\ldots.$$

V. Aufgaben der Terminrechnung.

Vorbemerkung. Die Zinsen eines Kapitals C zu p Procent in T Jahren sind $\frac{CpT}{100}$ und die Zinsen eines andern Kapitals C' ebenfalls

zu p Procent in T' Jahren $\frac{C'pT'}{100}$. Die Zinsen, welche die beiden Kapitalien C und C' in den Zeiten T und T' tragen, verhalten sich also zu einander wie $\frac{CpT}{100} : \frac{C'p'T'}{100}$, d. i. wie CT : C'T'. Hieraus geht hervor: **Bei gleichen Procenten verhalten sich die Zinsen verschiedener Kapitalien in verschiedenen Zeiten, wie die Producte aus den Zeiten und Kapitalien.**

12. Beispiel.

Es soll Jemand in 5 Terminen folgende Zahlungen leisten: eine Summe a nach m, eine Summe b nach n, eine Summe c nach o, eine Summe d nach p und eine Summe e nach q Monaten. Wann muß die ganze Summe a + b + c + d + e auf einmal entrichtet werden?

Angenommen, die Zahlung müsse nach x Monaten erfolgen, so erhält man nach dem in der Vorbemerkung Gesagten die Gleichung:

$$x(a + b + c + d + e) = am + bn + co + dp + eq,$$

folglich

$$x = \frac{am + bn + co + dp + eq}{a + b + c + d + e}.$$

Man drücke diese Formel in Worten aus!

VI. Aufgaben über die gleichförmige Bewegung.

13. Beispiel.

Zwei Körper haben anfangs die Entfernung d (1200 Meter). Sie bewegen sich einander gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c und c' (5 Meter und 3 Meter in der Sekunde) entgegen. Wann treffen sie zusammen?

Die Zahl der Sekunden bis zum Zusammentreffen . . = x
demnach der Weg des 1. Körpers, in m ausgedrückt, . . = cx
und " " " 2. " " " " . . = c'x
Da nun die Summe der Wege, nämlich cx + c'x, der Entfernung d gleich sein muß, so ergiebt sich die Gleichung:

$$cx + c'x = d$$

folglich: $$x = \frac{d}{c + c'}$$

$$= \frac{1200}{5 + 3} = 150 \text{ (Sekunden).}$$

14. Beispiel.

Wie gestaltet sich die Gleichung, wenn die beiden Körper der vorigen Aufgabe sich hintereinander bewegen?

$$cx - c'x = d$$

$$x = \frac{d}{c - c'}$$

$$= \frac{1200}{5 - 3} = 600 \text{ (Sekunden).}$$

15. Beispiel.

Zwei Körper haben die Entfernung d (1200 Meter) von einander und die Geschwindigkeiten c und c' Meter (5 Meter und 3 Meter). Der erste Körper, der sich dem zweiten entgegenbewegt, beginnt seine Bewegung um t (60) Sekunden früher. Wann treffen sie sich?

Zahl der Sekunden bis zum Zusammentreffen vom Abgange des später Abgehenden . . . . $= x$
demnach die Zahl der Sekunden des früher Abgehenden $= x + t$
folglich der Weg des später Abgehenden . . . . . $= c'x$
und " " " früher " . . . $= c(x + t)$
mithin:

$$c(x + t) + c'x = d$$

oder $$cx + ct + c'x = d$$

" $$cx + c'x = d - ct$$

folglich $$x = \frac{d - ct}{c + c'}$$

$$= \frac{1200 - 300}{5 + 3} = 112\tfrac{1}{2} \text{ (Sek.)}$$

und $$x + t = 112\tfrac{1}{2} + 60 = 172\tfrac{1}{2} \text{ (Sekunden).}$$

16. Beispiel.

Wie gestaltet sich die Gleichung der vorigen Aufgabe für den Fall, daß die Bewegung hinter einander erfolgt?

$$c(x + t) - c'x = d$$

$$x = \frac{d - ct}{c - c'}$$

$$= \frac{1200 - 300}{5 - 3} = \mathbf{450} \text{ (Sekunden).}$$

folglich $$x + t = 450 + 60 = \mathbf{510} \text{ (Sekunden).}$$

17. Beispiel.

Zwei Körper A und B haben die Entfernung d (= 1200 m); Körper A legt in t (= 3) Sekunden eine Wegstrecke von s (= 15) Meter, B in t′ (= 4) Sekunden einen Weg von s′ (= 12) Meter zurück. Wann treffen sie zusammen, wenn Körper A seine Bewegung n (= 60) Sekunden früher beginnt, und zwar:

a) Wann begegnen sie sich,

b) Wann holen sie sich ein?

a) Zahl der Sekunden bis zum Zusammentreffen vom Abgang des Körpers B . . . . $= x$

also ist Körper A bis zum Zusammentreffen auf dem Wege $= x + n$

Körper B legt zurück . . . . $= \frac{s'}{t'}x$

" A " " . . . . $= \frac{s}{t}(x + n)$

folglich erhält man die Gleichung:

$$\frac{s}{t}(x + n) + \frac{s'}{t'}x = d$$

oder $$\frac{sx + sn}{t} + \frac{s'x}{t'} = d$$

" $$st'x + nst' + s'tx = dtt'$$

" $$x = \frac{dtt' - nst'}{st' + s't} = \frac{t'(dt - ns)}{st' + s't}.$$

$$= \frac{4(1200 \,.\, 3 - 60 \,.\, 15)}{15 \,.\, 4 + 12 \,.\, 3} = \mathbf{112\tfrac{1}{2}} \text{ (Sek.)}$$

folglich $$x + n = 112\tfrac{1}{2} + 60 = \mathbf{172\tfrac{1}{2}} \text{ (Sek.)}$$

b) Man findet die Zeit, in der sie sich einholen, nach der Gleichung:

$$\frac{s}{t}(x + n) - \frac{s'}{t'}x = d$$

oder
$$\frac{sx + sn}{t} - \frac{s'x}{t'} = d$$

„
$$st'x + st'n - s'tx = dtt'$$

„
$$x = \frac{t'(dt - ns)}{st' - s't}$$

$$= \frac{4(1200 \,.\, 3 - 60 \,.\, 15)}{15 \,.\, 4 - 12 \,.\, 3} = 450 \text{ (Sekunden.)}$$

folglich
$$x + n = 510 \text{ (Sekunden).}$$

18. Beispiel.

Zu welchen Zeiten stehen die Zeiger einer Uhr über einander?

Vorbemerkung. Der Minutenzeiger durchläuft in einer Stunde den ganzen Stundenkreis, mithin:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{in einer Minute} & = \frac{1}{60} \\ \text{„ zwölf Minuten} & = \frac{12}{60} \\ \text{„ n „} & = \frac{n}{60} \\ \text{„ einer halben Stunde} & = \frac{1}{2} \\ \text{„ „ viertel „} & = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \text{desselben} = p.$$

Da der Stundenzeiger 12mal so langsam geht, indem er den ganzen Stundenkreis erst in 12 Stunden durchläuft, so beschreibt er

$$\left.\begin{array}{ll} \text{in einer Stunde} & = \frac{1}{12} \\ \text{„ „ Minute} & = \frac{1}{720} \\ \text{„ zwölf Minuten} & = \frac{12}{720} \\ \text{„ n „} & = \frac{n}{720} \end{array}\right\} \text{des ganzen Stundenkreises} = p.$$

Um 12 Uhr stehen beide Zeiger über einander. Stehen sie wieder über einander, so muß der Minutenzeiger eine ganze Umdrehung mehr gemacht haben. Nun durchläuft der Minutenzeiger in einer Minute $\frac{1}{60}p$, der Stundenzeiger aber $\frac{1}{720}p$. Der Weg des ersteren ist also, wenn man die Zahl der Minuten, in welchen der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt, durch x bezeichnet, $\frac{p}{60} \cdot x$ und der Weg des letzteren $\frac{p}{720} \cdot x$. Folglich ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{p}{60} \cdot x - \frac{p}{720} \cdot x = p.$$

$$12px - px = 720p$$

$$12x - x = 720$$

$$11x = 720$$

$$x = 65\tfrac{5}{11} \text{ Minuten.}$$

Also stehen die beiden Zeiger $65\frac{5}{11}$ Minuten nach 12 Uhr oder $5\frac{5}{11}$ Minuten nach eins, zum ersten mal über einander. Nach ebenso viel Minuten, also nach $130\frac{10}{11}$ Minuten nach 12, oder $10\frac{10}{11}$ Minuten nach 2 holt der Minutenzeiger den Stundenzeiger zum zweiten mal ein, zum 11. Mal nach 12 Stunden.

19. Beispiel.

Es ist 4 Uhr; wann decken sich beide Zeiger?

Der Vorsprung des Stundenzeigers . . . . . . $= \frac{p}{3}$

der Minutenzeiger durchläuft in 1 Minute . . . $= \frac{1}{60}p$

der Stundenzeiger durchläuft in 1 Minute . . . $= \frac{1}{720}p$

Zahl der Minuten, in welchen der Minutenzeiger über den Stundenzeiger zu stehen kommt . . . . . . $= x$

Also der Weg des Minutenzeigers . . . . . . $= \frac{p}{60} \cdot x$

und " " " Stundenzeigers . . . . . . $= \frac{p}{720} \cdot x$

Mithin:

$$\frac{p}{60} \cdot x - \frac{p}{720} \cdot x = \frac{p}{3}$$

$$12px - px = 240p$$

$$12x - x = 240$$

$$x = \frac{240}{11} = 21\tfrac{9}{11} \text{ Minuten.}$$

Zur weiteren Uebung im Bilden und Auflösen von Gleichungen können die Aufgaben in „M. Hirsch“ und „Hofmann“ dienen.

II.

Mit mehreren Unbekannten.

§ 25.

Auflösung gegebener Gleichungen.

Aus der Gleichung $4x + 3y = 31$, in welcher zwei von einander unabhängige unbekannte Zahlen vorkommen, läßt sich zwar eine der Unbekannten, z. B. x, ausscheiden, wodurch man

$$x = \frac{31 - 3y}{4}$$

erhält, allein hiedurch ist der Werth von x noch nicht bestimmt, vielmehr bleibt er solange unbestimmt, bis man für y einen bestimmten Werth einsetzt. Man ersieht daraus, daß eine einzige Gleichung zur Auflösung der gegebenen nicht ausreicht. Ist nun aber noch die Gleichung·

$$5x - 2y = 10$$

vorgelegt, in welcher x und y denselben Werth haben, wie in der ersten, so ist es möglich, die Gleichungen so mit einander zu verbinden, daß man nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält. In ähnlicher Weise läßt sich darthun, daß zur Auffindung von 3, 4, 5 u. s. w. Unbekannten der Reihe nach 3, 4, 5 u. s. w. von einander unabhängige Gleichungen erforderlich sind. Aus dem Gesagten geht hervor:

Zur Bestimmung mehrerer unbekannter Zahlen sind eben so viele von einander unabhängige Bestimmungsgleichungen erforderlich als unbekannte Zahlen vorhanden sind.

Die Unbekannten werden gefunden, indem man sie nach einander aus den Gleichungen wegschafft (eliminirt). Auf diese Weise erhält man aus n Gleichungen mit n Unbekannten $(n - 1)$ Gleichungen mit $(n - 1)$ Unbekannten, aus $(n - 1)$ Gleichungen mit $(n - 1)$ Unbekannten $(n - 2)$ Gleichungen mit $(n - 2)$ Unbekannten u. s. w. abwärts bis zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Je nach dem Verfahren, das man einschlägt, um die

Endgleichung zu erhalten, unterscheidet man vier Auflösungs- oder Eliminationsmethoden, die im Nachfolgenden entwickelt werden sollen.

a.

Die Substitutionsmethode.

Um das Wesen dieser Methode zu erkennen, bedenke man zunächst Folgendes. Jede der zwei Unbekannten muß in den beiden Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$
$$2)\ 5x - 2y = 10$$

denselben Werth haben. Löst man nun eine dieser zwei Gleichungen für die eine der beiden Unbekannten, z. B. für x, auf und setzt den hiefür erhaltenen Zahlenausdruck in die andere Gleichung anstatt x ein (substituirt den Werth für x), so muß x aus dieser Gleichung eliminirt und es muß zugleich eine Gleichung mit nur einer Unbekannten erhalten werden. Also:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$
$$2)\ 5x - 2y = 10$$

Aus 1) ist $x = \frac{31 - 3y}{4}$. Diesen Werth für x in Gleichung 2) substituirt, kommt:

$$3)\ 5\left(\frac{31 - 3y}{4}\right) - 2y = 10$$

oder $155 - 15y - 8y = 40$

" $-23y = -115$

" $23y = 115$

und hieraus $y = \frac{115}{23} = 5.$

Setzt man diesen für y gefundenen Werth in eine der gegebenen Gleichungen, z. B. in die erste, für y, so erhält man:

$$4x + 15 = 31$$

und hieraus $x = 4.$

2. Beispiel.

Sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so entwickelt man aus einer derselben eine der 3 Unbekannten und setzt diesen Werth statt dieser Unbekannten in die zwei andern Gleichungen. Hiedurch erhält man zwei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten. Wendet man auf

diese das im 1. Beispiel gezeigte Verfahren an, so gelangt man schließlich zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Also:

$$1)\ 4x + 3y + 6z = 41$$
$$2)\ 5x - 2y + z = 8$$
$$3)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Aus 3) ist $x = \frac{12 + 4y - 5z}{2}$.

Diesen Werth in 1) substituirt, kommt:

$$4)\ 4 . \frac{12 + 4y - 5z}{2} + 3y + 6z = 41$$

oder $48 + 16y - 20z + 6y + 12z = 82$

" $5)\ 22y - 8z = 34.$

Den Werth von x in 2) substituirt, erhält man:

$$6)\ 5 . \frac{12 + 4y - 5z}{2} - 2y + z = 8$$

oder $60 + 20y - 25z - 4y + 2z = 16$

" $7)\ 16y - 23z = - 44.$

Die beiden Gleichungen:

$$5)\ 22y - 8z = 34$$
$$7)\ 16y - 23z = - 44$$

enthalten noch die beiden Unbekannten y und z.

Aus 7) ist $y = \frac{23z - 44}{16}$.

Diesen Werth für y in 5) substituirt, erhält man:

$$8)\ 22 . \frac{23z - 44}{16} - 8z = 34$$

oder $506z - 968 - 128z = 544$

" $378z = 1512$

und hieraus $z = \frac{1512}{378} = 4.$

Setzt man diesen Werth für z in 5), so erhält man:

$$9)\ 22y - 32 = 34$$

oder $22y = 66$

und daraus $y = \frac{66}{22} = 3.$

Trägt man endlich diese beiden Werthe etwa in 1) ein, so ergiebt sich:

$$10)\ 4x + 9 + 24 = 41$$

oder $4x = 8$

und daraus $x = 2.$

Also:

$$x = 2$$
$$y = 3$$
$$z = 4.$$

Es ist kaum zu bemerken nöthig, daß die soeben entwickelte Auflösungsmethode auch dann anwendbar ist, wenn 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten u. s. w. gegeben sind. Das Verfahren, Gleichungen nach der Substitutionsmethode aufzulösen, läßt sich folgendermaßen kurz und bündig zusammenfassen:

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so bestimmt man aus einer der n Gleichungen eine Unbekannte und substituirt deren Werth für diese Unbekannte in jede der übrigen (n — 1) Gleichungen. Hiedurch wird in diesen eine Unbekannte eliminirt, so daß man (n — 1) Gleichungen mit höchstens (n — 1) Unbekannten erhält. Eine dieser (n — 1) Gleichungen löst man hierauf für eine zweite Unbekannte auf und trägt deren Werth in die noch vorhandenen (n — 2) Gleichungen ein, wodurch sich (n — 2) Gleichungen mit höchstens (n — 2) Unbekannten ergeben. Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis man bei einer Gleichung mit einer Unbekannten angelangt ist, aus der man in der bekannten Weise diese ermittelt. Die übrigen Unbekannten werden aus den vorhergehenden Gleichungen durch Substitution gefunden.

b.

Die Comparations- oder Combinationsmethode.

Es sind die zwei Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$
$$2)\ 5x - 2y = 10$$

nach dieser Methode aufzulösen. Da x und y in den beiden Gleichungen beziehlich denselben Werth haben, so müssen auch die Zahlenausdrücke, die man etwa für x aus den zwei Gleichungen erhält, wenn man dieselben auf diese Unbekannte reducirt, nothwendig einander gleich sein. Bildet man daher aus den für x erhaltenen Werthen eine Gleichung, so wird damit x offenbar eliminirt, indem diese neue Gleichung nur noch y enthält. Demnach:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$
$$2)\ 5x - 2y = 10$$

Aus 1) ist $x = \frac{31 - 3y}{4}$

" 2) " $x = \frac{10 + 2y}{5}$

Also ist 3) $\frac{31 - 3y}{4} = \frac{10 + 2y}{5}$

oder $155 - 15y = 40 + 8y$

" $- 23y = - 115$

" $23y = 115$

und daraus $y = \frac{115}{23} = 5.$

x wird bestimmt, indem man den Werth von y etwa in 1) für y substituirt:

$$4x + 15 = 31$$
$$4x = 16$$
$$x = 4.$$

Also:

$$x = 4$$
$$y = 5.$$

2. Beispiel.

$$1)\ 4x + 3y + 6z = 41$$
$$2)\ 5x - 2y + z = 8$$
$$3)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Man löst zunächst jede Gleichung für eine und dieselbe Unbekannte, z. B. für x, auf:

Aus 1) ist $x = \frac{41 - 3y - 6z}{4}$

Aus 2) ist $x = \frac{8 + 2y - z}{5}$

Aus 3) ist $x = \frac{12 + 4y - 5z}{2}.$

Aus diesen für x erhaltenen Werthen bildet man nun zwei Gleichungen, was dadurch geschehen kann, daß man etwa den ersten Werth dem zweiten und den ersten dem dritten gleichsetzt (oder wie?). Hiedurch erhält man, indem man Werth 1) und 2) einander gleichsetzt:

$$4)\ \frac{41 - 3y - 6z}{4} = \frac{8 + 2y - z}{5}$$

oder $205 - 15y - 30z = 32 + 8y - 4z$

" $- 23y - 26z = - 173$

" 5) $23y + 26z = 173.$

Bildet man nun auch aus Werth 1) und Werth 3) eine Gleichung, so folgt:

$$6) \quad \frac{41 - 3y - 6z}{4} = \frac{12 + 4y - 5z}{2}$$

oder $41 - 3y - 6z = 24 + 8y - 10z$

" 7) $- 11y + 4z = - 17.$

Aus 5) ist $z = \frac{173 - 23y}{26}$

Aus 7) ist $z = \frac{- 17 + 11y}{4}.$

Folglich:

$$8) \quad \frac{173 - 23y}{26} = \frac{- 17 + 11y}{4}$$

oder $346 - 46y = - 221 + 143y$

" $- 189y = - 567$

" $189y = 567$

und daraus $y = \frac{567}{189} = 3.$

x und z werden durch Substitution gefunden.

In vorstehenden 2 Beispielen ist das Wesen der Comparationsmethode auseinandergesetzt worden. Ueberblickt man dasselbe, so findet man, daß es in Folgendem besteht:

Man bestimmt aus allen gegebenen n Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte und setzt je 2 der erhaltenen Werthe einander gleich. Hiedurch erhält man (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten. Reducirt man hierauf alle (n — 1) Gleichungen wieder auf eine und dieselbe Unbekannte und combinirt je zwei der gefundenen Werthe zu Gleichungen, so resultiren (n — 2) Gleichungen mit (n — 2) Unbekannten. Diese Operation setzt man so lange fort, bis sich schließlich eine Gleichung mit einer Unbekannten ergiebt, deren Werth bestimmt wird. Die Substitution dieses Werthes in vorhergehende passende Gleichungen u. s. w. bestimmt die Werthe der anderen Unbekannten.

c.

Die Additions- und Subtractions-, oder Aggregations-, oder Coefficienten-Methode (auch englische Methode oder „Eliminationsmethode im engern Sinne“ genannt).

Es seien die beiden Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$
$$2)\ 5x - 2y = 10$$

zur Auflösung nach dieser Methode vorgelegt. Die Werthe für x und y in diesen beiden Gleichungen werden bekanntlich nicht verändert, wenn man alle Glieder beider Gleichungen mit einer und derselben Zahl multiplicirt. In dieser Eigenschaft der Gleichungen ist uns ein Mittel an die Hand gegeben, der zu eliminirenden Unbekannten in beiden Gleichungen denselben Coefficienten zu verschaffen. Multiplicirt man beispielsweise Gleichung 1) mit 2 und Gleichung 2) mit 3, so erhält man:

$$3)\ 8x + 6y = 62$$
$$4)\ 15x - 6y = 30.$$

Es ist nun einleuchtend, daß die Glieder, welche y enthalten, durch Addition der beiden Gleichungen 3) und 4) verschwinden, die Unbekannte y also hiedurch aus beiden Gleichungen eliminirt wird; denn führt man diese Addition aus, so folgt;

$$5)\ 23x = 92$$

und daraus $$x = \frac{92}{23} = 4.$$

Hätte man, zum Zwecke der Elimination von x aus beiden Gleichungen, Gleichung 1) mit 5, Gleichung 2) mit 4 multiplicirt, so würde man erhalten haben:

$$3)\ 20x + 15y = 155$$
$$4)\ 20x - 8y = 40.$$

Auf den ersten Blick ist ersichtlich, daß hier die Addition beider Gleichungen zu einander eine Elimination der Unbekannten x nicht zur Folge hat. Subtrahirt man aber Gleichung 4) algebraisch von Gleichung 3), so resultirt:

$$5)\ 23y = 115$$

und daraus $$y = \frac{115}{23} = 5.$$

2. Beispiel.

$$1)\ 4x + 3y + 6z = 41$$
$$2)\ 5x - 2y + z = 8$$
$$3)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Um y zu eliminiren, multiplicirt man zunächst Gleichung 1) mit 2 und Gleichung 2) mit 3 und addirt beide Gleichungen zu einander, also:

$$4)\ 8x + 6y + 12z = 82$$
$$5)\ 15x - 6y + 3z = 24.$$

Durch Addition beider erhält man:

$$6)\ 23x + 15z = 106.$$

Hierauf multiplicirt man Gleichung 2) mit 2 und Gleichung 3) mit 1, wodurch sich ergiebt;

$$7)\ 10x - 4y + 2z = 16$$
$$8)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Subtrahirt man Gleichung 8) von Gleichung 7), so kommt:

$$9)\ 8x - 3z = 4.$$

Die 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten heißen also:

$$6)\ 23x + 15z = 106$$
$$9)\ 8x - 3z = 4.$$

Um z zu eliminiren, multiplicirt man Gleichung 6) mit 1 und Gleichung 9) mit 5, so daß man erhält:

$$10)\ 23x + 15z = 106$$
$$11)\ 40x - 15z = 20.$$

Beide Gleichungen addirt, erhält man:

$$12)\ 63x = 126$$

und daraus $x = \frac{126}{63} = 2.$

Substituirt man den Werth von x in Gleichung 10), so folgt:

$$46 + 15z = 106$$
$$15z = 60$$
$$z = 4.$$

Den Werth von x und z in Gleichung 1) gesetzt, kommt:

$$8 + 3y + 24 = 41$$
$$3y = 9$$
$$y = 3.$$

Diese zwei Beispiele werden genügen, um eine klare Einsicht in das Wesen der Coefficienten-Methode zu verschaffen. Kurz und bündig zusammengefaßt, läßt es sich folgendermaßen formuliren:

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so eliminirt man aus je 2 Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte, nachdem man ihr in beiden Gleichungen durch geeignete Multiplication denselben Coefficienten verschafft hat (wofern sie nicht von vorn herein den gleichen hat) durch Addition oder Subtraction — durch Addition, wenn die Vorzeichen der zu eliminirenden Glieder entgegengesetzt, durch Subtraction, wenn sie gleich sind. Auf diese Weise erhält man (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten. Diese (n — 1) Gleichungen unterwirft man demselben Verfahren, wie die n Gleichungen und setzt es solange fort, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt, deren Werth man bestimmt. Die übrigen Unbekannten findet man durch Substitution.

d.

Die Bezout'sche oder französische Methode.

Es sei die Aufgabe gestellt, die Werthe der 2 Unbekannten folgender zwei Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$
$$2)\ 5x - 2y = 10$$

nach dieser Methode zu bestimmen. Eliminiren wir zunächst x aus beiden Gleichungen. Im vorigen Beispiel wurde schon gesagt, daß sich der Werth der Unbekannten nicht ändert, wenn man sämmtliche Glieder einer Gleichung mit einer und derselben Zahl multiplicirt. Wenden wir diesen Satz auf Gleichung 1) an und multipliciren sie etwa mit der unbestimmten Zahl a, so folgt:

$$3)\ 4ax + 3ay = 31a.$$

Addirt man nun Gleichung 2) zu Gleichung 3), so ergiebt sich die eine Gleichung:

$$4)\ 5x + 4ax - 2y + 3ay = 10 + 31a.$$

oder, indem man die Unbekannten heraustrennt:

$$x(5 + 4a) + y(3a - 2) = 10 + 31a.$$

Da nun x eliminirt werden soll, so muß das Glied x(5 + 4a) Null werden, d. h es muß der Coefficient dieses Gliedes, nämlich 5 + 4a, Null werden. Es ist nun leicht ersichtlich, daß er dies wird, wenn man der neu eingeführten und bis jetzt unbestimmt gebliebenen Zahl a den Werth $-\frac{5}{4}$ beilegt. Dieser wird übrigens leichter noch gefunden, wenn man setzt:

$$5 + 4a = 0$$

denn hieraus folgt zunächst:

$$4a = -5$$

und daraus $a = -\frac{5}{4}$

Die Substitution dieses Werthes in die Gleichung 4) liefert:

$$5)\ x(5 - 5) + y(-\frac{15}{4} - 2) = 10 - \frac{155}{4}$$

oder $-\frac{23y}{4} = -\frac{115}{4}$

" $23y = 115$

und daraus $y = 5$

in ähnlicher Weise $x = 4.$

2. Beispiel.

$$1)\ 4x + 3y + 6z = 41$$
$$2)\ 5x - 2y + z = 8$$
$$3)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Man multiplicirt 2) mit a und 3) mit b, also:

$$4)\ 5ax - 2ay + az = 8a$$
$$5)\ 2bx - 4by + 5bz = 12b.$$

Die Summation der 3 Gleichungen 1), 4) und 5) liefert:

$$6)\ (4 + 5a + 2b)x + (3 - 2a - 4b)y + (6 + a + 5b)z$$
$$= 41 + 8a + 12b.$$

Sollen nun x und y zum Wegfallen gebracht werden, so müssen die Glieder:

$$(4 + 5a + 2b)x \text{ und}$$
$$(3 - 2a - 4b)y$$

gleich Null werden, d. h. die Coefficienten $(4 + 5a + 2b)$ und $(3 - 2a - 4b)$. Um nun die Werthe für a und b zu finden, die dies bewirken, setzen wir, wie schon im vorhergehenden Beispiel gezeigt wurde:

$$4 + 5a + 2b = 0$$

oder $\text{I}\quad 5a + 2b = -4$

und $3 - 2a - 4b = 0$

oder $\text{II}\quad -2a - 4b = -3.$

I mit 2 und II mit 1 multiplicirt, erhält man:

$$\text{III}\quad 10a + 4b = -8$$
$$\text{IV}\quad -2a - 4b = -3.$$

Das Resultat der Addition beider ist:

$$\text{V} \quad 8a = -11$$

und daraus $a = -\frac{11}{8}$

Die Substitution dieses Werthes in III giebt:

$$\text{VI} \quad -\frac{110}{8} + 4b = -8$$

oder $4b = \frac{46}{8}$

und daraus $b = \frac{46}{32} = \frac{23}{16}$.

Substituirt man nun diese für a und b gefundenen Werthe in die Gleichung 6), so erhält man die Gleichung:

$$7) \left(4 - \frac{55}{8} + \frac{46}{16}\right)x + \left(3 + \frac{22}{8} - \frac{23}{4}\right)y +$$

$$\left(6 - \frac{11}{8} + \frac{115}{16}\right)z = 41 - \frac{88}{8} + \frac{69}{4}$$

oder $\left(6 - \frac{11}{8} + \frac{115}{16}\right)z = 41 - 11 + \frac{69}{4}$

" $\frac{189}{16}z = \frac{756}{16}$

" $189z = 756$

und daraus $z = \frac{756}{189} = 4.$

In ähnlicher Weise wird x und y gefunden.

In den vorstehenden zwei Beispielen wurde versucht, das Wesen der Bezout'schen Methode deutlich darzulegen. Resumiren wir dasselbe.

Sind n Gleichungen gegeben, so multiplicirt man alle bis auf eine mit je einem beliebigen Buchstaben und addirt hierauf sämmtliche Gleichungen. In der so erhaltenen Gleichung setzt man hierauf die Coefficienten von $(n - 1)$ Unbekannten gleich Null und bestimmt aus diesen auf Null gebrachten Gleichungen die Werthe von den eingeführten Buchstaben. Diese trägt man endlich in die Summengleichung ein, wodurch man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, deren Werth bestimmt wird. Die Werthe der andern Unbekannten können auf ähnliche Weise gefunden werden.

Anmerkung. Welche Methode für die Elimination von Unbekannten am schnellsten und bequemsten zum Ziele führt, hängt von der Beschaffenheit der vorliegenden Gleichungen ab. Im allgemeinen dürfte

die Additions- und Subtractionsmethode die vortheilhafteste sein. Umsichtige Verbindung der verschiedenen Methoden zur Auflösung vorgelegter Gleichungen kürzt oft die Arbeit bedeutend ab. Für den Anfang empfiehlt es sich jedoch, Gleichungen durch jede der 4 Methoden für sich allein und ohne Verknüpfung mit den andern aufzulösen, damit das Charakteristische der einzelnen Methoden möglichst klar zum Bewußtsein gebracht werde.

Es sei noch bemerkt, daß die vorgelegten Gleichungen zuerst geordnet werden müssen, bevor man mit der Auflösung derselben nach einer der 4 oben besprochenen Methoden beginnt.

Reichliches Material zur Einübung des Vorhergehenden findet sich in „M. Hirsch" und „Hofmann" unter der Ueberschrift: „Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten." Die Auflösung der in diesen Sammlungen vorkommenden **reinen Zahlengleichungen** hat keine besondere Schwierigkeit; sie ist durch den vorhergehenden § vollständig gelehrt und bedarf daher keiner weiteren Erklärung. Anders steht es jedoch mit der Auflösung **reiner oder gemischter Buchstabengleichungen**; denn hier ist nicht nur die Aufgabe zu lösen, die Werthe der Unbekannten zu bestimmen, sondern zugleich die Forderung gestellt, die Werthe derselben auf die einfachste Form zu bringen, deren sie fähig sind. Es wird daher nöthig sein, an einigen Beispielen dieser Art zu zeigen, wie dieser doppelten Forderung am zweckentsprechendsten zu genügen ist.

1. Beispiel. (M. Hirsch Nr. 15.)

$$1)\quad bcx = cy - 2b$$

$$2)\quad b^2y + \frac{a(c^3 - b^3)}{bc} = \frac{2b^3}{c} + c^3x.$$

Gleichung 2) reducirt und transponirt, folgt:

$$3)\quad -bc^4x + b^3cy = -ac^3 + ab^3 + 2b^4$$

Gleichung 1) mit c^3 multiplicirt:

$$4)\quad bc^4x - c^4y = -2bc^3.$$

Gleichung 3) und 4) addirt, kommt:

$$5)\quad (b^3c - c^4)y = 2b^4 - ac^3 + ab^3 - 2bc^3$$

und daraus
$$y = \frac{2b^4 - ac^3 + ab^3 - 2bc^3}{b^3c - c^4}$$

$$= \frac{2b(b^3 - c^3) + a(b^3 - c^3)}{c(b^3 - c^3)}$$

$$= \frac{(2b + a)(b^3 - c^3)}{c(b^3 - c^3)}$$

$$= \frac{2b + a}{c}.$$ (Man vergleiche § 20, II).

Diesen Werth für y in 1) substituirt, erhält man:

$$6)\quad bcx = c \cdot \frac{2b + a}{c} - 2b$$

oder

$$bcx = \frac{2bc + ac - 2bc}{c}$$

und daraus

$$x = \frac{\frac{2bc + ac - 2bc}{c}}{bc}$$

$$= \frac{2bc + ac - 2bc}{bc^2}$$

$$= \frac{a}{bc}.$$

2. Beispiel. (M. Hirsch Nr. 22.)

$$1)\quad ax + by = c$$

$$2)\quad dx + ey = f$$

$$3)\quad gy + hz = l$$

1) mit e und 2) mit b multiplicirt, kommt:

$$4)\quad aex + bey = ce$$

$$5)\quad bdx + bey = bf.$$

5) von 4) subtrahirt, bleibt:

$$6)\quad (ae - bd)x = ce - bf$$

und daraus

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Substituirt man diesen für x gefundenen Werth in Gleichung 2), so ergiebt sich:

$$7)\quad d \cdot \frac{ce - bf}{ae - bd} + ey = f$$

oder

$$ey = f - \frac{dce - bdf}{ae - bd}$$

"

$$ey = \frac{aef - bdf - dce + bdf}{ae - bd}$$

und daraus

$$y = \frac{aef - bdf - dce + bdf}{aee - bde}$$

$$= \frac{aef - dce}{aee - bde}$$

$$= \frac{e(af - cd)}{e(ae - bd)}$$

$$= \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Diesen Werth von y endlich in 3) substituirt, folgt:

$$8)\ g \cdot \frac{af - cd}{ae - bd} + hz = 1$$

oder $$hz = 1 - \frac{afg - cdg}{ae - bd}$$

" $$hz = \frac{ael - bdl - afg + cdg}{ae - bd}$$

und daraus $$z = \frac{ael - bdl - afg + cdg}{aeh - bdh}$$

$$= \frac{a(el - fg) - d(bl - cg)}{h(ae - bd)}.$$

Also:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

$$z = \frac{a(el - fg) - d(bl - cg)}{h(ae - bd)}.$$

3. Beispiel.

$$1)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$$

$$2)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$$

$$3)\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c.$$

In diesen Beispielen ist die Wegschaffung der Unbekannten aus den Nennern nicht erforderlich; denn subtrahirt man ohne weiteres Gleichung 2) von Gleichung 1), so erhält man:

$$4)\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = a - b.$$

Addirt man hiezu Gleichung 3), so ergiebt sich:

$$5)\ \frac{2}{y} = a - b + c$$

und daraus $$y = \frac{2}{a - b + c}.$$

Subtrahirt man Gleichung 3) von Gleichung 2), so folgt:

$$6)\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = b - c.$$

Gleichung 6) zu Gleichung 1) addirt, folgt:

$$7)\ \frac{2}{x} = a + b - c$$

und daraus $x = \frac{2}{a + b - c}$.

Subtrahirt man 3) von 1), so kommt:

$$8)\ \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = a - c$$

und wenn man endlich Gleichung 8) von Gleichung 2) subtrahirt, also:

$$2)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$$

$$8)\ \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = a - c$$

$$- \quad + \quad - \quad +$$

so folgt: $9)\ \frac{2}{z} = b + c - a$

und daraus $z = \frac{2}{b + c - a}$.

Also:

$$x = \frac{2}{a + b - c}$$

$$y = \frac{2}{a - b + c}$$

$$z = \frac{2}{b + c - a}$$

Anmerkung. Die Werthe von x und z wurden aus dem Grunde analog wie der Werth von y entwickelt, um diese hier eingehaltene Auflösungsweise, die man zuweilen mit Vortheil anwenden kann, an mehreren Beispielen zu zeigen. Man wäre auch zum Ziel gekommen, wenn man den Werth für y, nämlich $\frac{2}{a - b + c}$, in Gleichung 1) und 3) gesetzt hätte.

§ 26.

Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten zur Auflösung von Textaufgaben.

In vorgelegten Aufgaben kommen häufig mehrere Unbekannte vor. In dem Fall bildet man aus den Bedingungen der Aufgabe so viele von einander unabhängige Bestimmungsgleichungen, als unbekannte Größen vorhanden sind. Wie diese dann aus den Gleichungen zu bestimmen sind, hat der vorige § gelehrt. Einige Beispiele sollen das Gesagte erläutern.

1. Beispiel.

Wenn man zum 4. Theil von dem 3fachen einer Zahl den 6. Theil vom 5fachen einer andern Zahl addirt, so erhält man $9\frac{2}{3}$. Subtrahirt man dagegen vom 8. Theil des 10fachen der ersten Zahl den 16. Theil vom 2fachen der zweiten Zahl, so bleibt 4 übrig. Wie heißen die beiden Zahlen?

Wenn man

zum 4. Theil vom 3fachen einer Zahl x . . . . . $\frac{3x}{4}$

den 6. „ „ 5 „ „ andern Zahl y . . . $\frac{5y}{6}$

addirt, so erhält man $9\frac{2}{3}$ . . . . . . $\frac{3x}{4} + \frac{5y}{6} = 9\frac{2}{3}$

und wenn man ferner

vom 8. Theil des 10fachen der Zahl x . . . . . $\frac{10x}{8}$

den 16. „ „ 2 „ „ „ y . . . . $\frac{2y}{16}$

subtrahirt, so bleibt 4 . . . . $\frac{10x}{8} - \frac{2y}{16} = 4$

Man erhält also aus der vorgelegten Aufgabe folgende 2 Bestimmungsgleichungen:

$$1)\ \frac{3x}{4} + \frac{5y}{6} = \frac{29}{3}$$

$$2)\ \frac{10x}{8} - \frac{2y}{16} = 4.$$

Schafft man die Nenner in beiden Gleichungen fort, so folgt:

$$3)\ 9x + 10y = 116$$
$$4)\ 20x - 2y = 64$$

3) mit 1 und 4) mit 5 multiplicirt, erhält man:

$$5)\ 9x + 10y = 116$$
$$6)\ 100x - 10y = 320$$

5) und 6) addirt:

$$7)\ 109x = 436$$

und daraus $x = 4.$

Diesen Werth in 3) substituirt:

$$36 + 10y = 116$$

oder $10y = 80$

und daraus $y = 8.$

2. Beispiel.

Für ein Kapital, das auf 1 Jahr ausgeliehen ist, müssen mit Einschluß der Zinsen nach dieser Zeit 2059,925 Mark zurückbezahlt werden. Da die Rückzahlung erst nach 1,8 Jahren erfolgte, so war der Betrag derselben auf 2127,865 Mark angewachsen. Wie groß ist das Kapital und zu wie viel % sind die Zinsen berechnet?

Bezeichnet man das ausgeliehene Kapital, in Mark ausgedrückt, durch x, und die Procente desselben durch y, so ergeben sich nach Beispiel 5, Gleichung 1) des § 24 folgende zwei Gleichungen:

$$1)\ x + \frac{xy}{100} = 2059{,}925$$

$$2)\ x + \frac{x\,.\,y\,.\,1{,}8}{100} = 2127{,}865.$$

Löst man dieselben auf (nachdem man die Nenner beseitigt, kann man Gleichung 1) mit 1,8 multipliciren und von ihr 2) subtrahiren, wodurch x gefunden wird, hierauf durch Substitution dieses Werthes in beide Gleichungen y bestimmen), so erhält man:

x = 1975 Mark
y = 4,3 %.

3. Beispiel.

Drei Zahlen haben folgende Beschaffenheit. Addirt man 3 zur ersten und zweiten, so verhalten sich die Summen wie 3 : 5; ad-

dirt man 4 zur ersten und dritten, so verhalten sich die Summen wie 1 : 2; subtrahirt man aber 10 von der zweiten und dritten, so verhalten sich die Differenzen wie 16 : 21. Welche Zahlen sind es?

Bezeichnet man die 3 zu suchenden Zahlen der Reihe nach durch x, y und z, so erhält man:

$$(x + 3) : (y + 3) = 3 : 5, \text{ oder } 5x + 15 = 3y + 9,$$
$$\text{oder } 5x - 3y = - 6.$$
$$(x + 4) : (z + 4) = 1 : 2, \text{ oder } 2x + 8 = z + 4,$$
$$\text{oder } 2x - z = - 4.$$
$$(y - 10) : (z - 10) = 16 : 21, \text{ oder } 21y - 210 = 16z - 160,$$
$$\text{oder } 21y - 16z = 50.$$

Die 3 gebildeten Gleichungen heißen also:

$$1)\ 5x - 3y = - 6$$
$$2)\ 2x - z = - 4$$
$$3)\ 21y - 16z = 50,$$

aus denen man $x = 24$, $y = 42$ und $z = 52$ erhält.

Weitere Uebungsbeispiele über die **Aufstellung** und **Auflösung** der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten finden sich in „M. Hirsch" und „Hofmann".

B.

Gleichungen des zweiten Grades.

I.

Mit einer Unbekannten.

a.

Rein-quadratische Gleichungen.

§ 27.

Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

Eine Gleichung von der Form $ax^2 = c$, in der, wie ersichtlich, die Unbekannte nur in der zweiten Potenz auftritt, heißt eine

rein-quadratische Gleichung. Dividirt man beide Seiten durch den Coefficienten von x^2, so erhält man:

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

und daraus

$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

1. Beispiel.

$$30x^2 = 17280.$$

$$x^2 = \frac{17280}{30} = 576$$

$$x = \pm \sqrt{576} = \pm 24$$

also

$$x_1 = 24.$$

und

$$x_2 = -24.$$

2. Beispiel.

$$x + \sqrt{7 + x^2} = \frac{28}{\sqrt{7 + x^2}}.$$

Den Nenner weggeschafft:

$$x\sqrt{7 + x^2} + 7 + x^2 = 28$$

oder

$$x\sqrt{7 + x^2} = 21 - x^2.$$

Beide Seiten quadrirt:

$$x^2(7 + x^2) = (21 - x^2)^2$$

oder

$$7x^2 + x^4 = 441 - 42x^2 + x^4$$

"

$$49x^2 = 441$$

"

$$x^2 = \frac{441}{49} = 9$$

und daraus

$$x = \pm \sqrt{9}$$

$$x_1 = 3.$$

$$x_2 = -3.$$

3. Beispiel.

Multiplicirt man den vierten und fünften Theil einer Zahl mit einander, addirt zu diesem Product 20, dividirt hierauf diese Summe durch 8 und subtrahirt schließlich von dem erhaltenen Quotienten 5, so erhält man die Zahl 20. Wie heißt diese Zahl?

Wenn man
von der unbekannten Zahl x
deren 4. und 5. Theil mit einander multiplicirt $\frac{x}{4} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x^2}{20}$
zu diesem Product 20 addirt, $\frac{x^2}{20} + 20 =$ . . . $\frac{x^2 + 400}{20}$
diese Summe durch 8 dividirt, $\frac{x^2 + 400}{20} : 8 =$ . . $\frac{x^2 + 400}{160}$
von dem Quotienten 5 subtrahirt . . . . . $\frac{x^2 + 400}{160} - 5$
so erhält man 20 . . . . . $\frac{x^2 + 400}{160} - 5 = 20.$

$$\frac{x^2 + 400}{160} - 5 = 20$$
$$x^2 + 400 - 800 = 3200$$
$$x^2 = 3600$$
$$x = \pm \sqrt{3600}$$
$$\mathbf{x_1 = 60}$$
$$\mathbf{x_2 = -60.}$$

b.

Unrein-quadratische Gleichungen.

§ 28.

Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

Die Gleichung $ax^2 \pm bx = c$ enthält die Unbekannte x außer in der zweiten auch in der ersten Potenz. Gleichungen dieser Beschaffenheit heißen **unrein- oder gemischt-quadratische Gleichungen.** Ist eine solche Gleichung auf die Form $x^2 \pm bx = c$, in welcher x^2 den Coefficienten $+1$ haben muß, gebracht, so bestimmt man die beiden Wurzeln der Gleichung, d. h. löst dieselbe auf. Um das hiebei einzuschlagende Verfahren besser zu verstehen, bedenke man Folgendes:

Eine Gleichung von der Form $x^2 \pm bx = c$ kann blos dadurch aufgelöst werden, daß man aus beiden Seiten derselben die Quadratwurzel zieht. Da nun aber die Ausziehung der Quadra-

wurzel ohne weiteres nicht möglich, indem die linke Seite der Gleichung kein vollständiges Quadrat ist, so kommt es darauf an, diese Seite durch Hinzufügung eines dritten Gliedes, der sogenannten quadratischen Ergänzung, zu einem vollständigen Quadrat zu machen. Aus der Formel $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ ergiebt sich nun aber, daß das dritte Glied des aus $(x \pm a)$ gebildeten Quadrats das Quadrat der Hälfte des Coefficienten im zweiten Glied desselben ist, ein Umstand, der uns das Mittel nahe legt, einen Ausdruck von der Form $x^2 + bx$ zum Quadrate zu vervollständigen; dieses Mittel ist nämlich $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, d. h. **das Quadrat des halben Coefficienten von** x. Ist daher eine Gleichung von der Form $x^2 + bx = c$ aufzulösen, so addirt man zu beiden Seiten der Gleichung das Quadrat des halben Coefficienten von x (man ergänzt die Gleichung). Hiedurch erhält man auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat.

1. Beispiel.

$$x^2 + 4x = 96.$$

Zu beiden Seiten das Quadrat des halben Coefficienten von x, nämlich $(2)^2$, addirt, folgt:

$$x^2 + 4x + 2^2 = 96 + 4$$

oder

$$(x + 2)^2 = 100.$$

Aus beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen, folgt:

$$x + 2 = \pm 10$$

oder

$$x_1 = 8$$
$$x_2 = -12.$$

Anmerkung. Der Gleichung $x^2 + 4x = 96$ leisten die beiden Werthe 8 und — 12, wie man sich leicht überzeugen kann, Genüge. Reducirt man dieselbe auf Null, also: $x^2 + 4x - 96 = 0$, und bildet nun sowohl die Summe als auch das Product der beiden gefundenen Werthe, so stellt sich heraus, daß diese beiden Wurzeln der vorgelegten gemischt-quadratischen Gleichung mit dem Coefficienten des zweiten Gliedes und mit dem dritten Gliede derselben in einem gewissen Zusammenhang stehen, der sich, da dasselbe von jeder gemischt-quadratischen Gleichung gilt, folgendermaßen allgemein aussprechen läßt:

a) Die Summe der beiden Wurzeln einer unrein=quadratischen Gleichung ist gleich dem Coefficienten des zweiten Gliedes der geordneten Gleichung mit dem entgegengesetzten Vorzeichen;

b) das Product der beiden Wurzeln einer solchen ist gleich dem bekannten dritten Gliede der geordneten Gleichung (Gesetz der Coefficienten).

2. Beispiel.

$$\frac{16\sqrt{x+3}}{x-2} - (16-2x) = \frac{2(24-3x)}{x-2} + 2x - 7.$$

Klammern gelöst und die 2 Glieder 2x weggelassen:

$$\frac{16\sqrt{x+3}}{x-2} - 16 = \frac{48-6x}{x-2} - 7.$$

Die Nenner fortgeschafft:

$$16\sqrt{x+3} - 16x + 32 = 48 - 6x - 7x + 14.$$

Die Wurzel isolirt und gleichnamige Glieder zusammengefaßt:

$$16\sqrt{x+3} = 3x + 30.$$

Mit 2 potenzirt und die Klammern aufgelöst:

$$256x + 768 = 9x^2 + 180x + 900.$$

Transponirt und zusammengefaßt:

$$-9x^2 + 76x = 132.$$

Die ganze Gleichung mit -1 multiplicirt und durch 9 dividirt:

$$x^2 - \frac{76x}{9} = -\frac{132}{9}.$$

Diese Gleichung ergänzt:

$$x^2 - \frac{76x}{9} + \left(\frac{38}{9}\right)^2 = -\frac{132}{9} + \frac{1444}{81}$$

oder

$$\left(x - \frac{38}{9}\right)^2 = \frac{256}{81}.$$

Aus beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen:

$$x - \frac{38}{9} = \pm\sqrt{\frac{256}{81}} = \pm\frac{16}{9}.$$

Mithin $$x = \frac{38}{9} \pm \frac{16}{9}$$

$$x_1 = \frac{38}{9} + \frac{16}{9} = 6.$$

$$x_2 = \frac{38}{9} - \frac{16}{9} = \frac{22}{9}.$$

3. Beispiel.

A und B gaben zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen 4000 Mark her. A ließ sein Geld 20 Monate stehen und erhielt an Einlage und Gewinn 1600 Mark. B ließ das seinige 12 Monate stehen und erhielt an Einlage und Gewinn 2600 Mark. Wie viel hatte jeder eingelegt?

Ist die Einlage des A, in Mark ausgedrückt x
so ist „ „ „ B, „ „ „ . . . $4000 - x$
A gewinnt an x Mark in 20 Monaten . . . $1600 - x$
B „ „ $(4000 - x)$ Mark in 12 Monaten $2600 - (4000 - x) =$ . . . . $(x - 1400)$

Folglich gewinnt A an 1 Mark in 1 Monat . . $\frac{1600 - x}{20x}$

„ „ B „ „ „ „ „ . $\frac{x - 1400}{(4000 - x)12}$

Mithin ergiebt sich, da die Kapitalien beider Personen gleiche Procente tragen, die Gleichung:

$$\frac{1600 - x}{20x} = \frac{x - 1400}{(4000 - x)12}.$$

Die Nenner weggeschafft:

$$3x^2 - 16800x + 19200000 = 5x^2 - 7000x.$$

Transponirt und zusammengefaßt:

$$-2x^2 - 9800x = -19200000.$$

Mit -1 multiplicirt und durch 2 dividirt:

$$x^2 + 4900x = 9600000.$$

Ergänzt:

$$x^2 + 4900x + (2450)^2 = 9600000 + 6002500.$$

oder $$(x + 2450)^2 = 15602500.$$

Aus beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen:

$$x + 2450 = \pm \sqrt{15602500} = \pm 3950.$$
$$x = -2450 \pm 3950.$$
$$x_1 = 1500$$
$$x_2 = -6400.$$

Die Einlage des A beträgt also 1500 Mark und die des B 4000 — 1500 = 2500 Mark.

Anmerkung. Um eine Gleichung von der Form $x^4 + 6x^2 = 40$ aufzulösen, setzt man $x^2 = z$ und $x^4 = z^2$; hiedurch verwandelt sich die gegebene Gleichung in:

$$z^2 + 6z = 40$$

aus der man erhält:

$$z^2 + 6z + 3^2 = 40 + 9$$
$$(z + 3)^2 = 49$$
$$z + 3 = \pm 7$$
$$z = -3 \pm 7$$
$$z_1 = -3 + 7 = 4$$
$$z_2 = -3 - 7 = -10.$$

Es ist also $x^2 = 4$

mithin $x = \pm 2$

und $x^2 = -10$

mithin $x = \pm \sqrt{-10}.$

Zur weitern Uebung im Bilden und Auflösen von Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten können die Beispiele in „M. Hirsch" und „Hofmann" &c. dienen.

II.

Mit mehreren Unbekannten.

§ 29.

Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

Die quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten werden im Allgemeinen so behandelt, wie die vom ersten Grade. In vielen Fällen ist es jedoch vortheilhaft, statt die Unbekannten unmittelbar selbst zu entwickeln, den Werth einer Verbindung derselben, z. B. ihrer Summe, Differenz u. s. w. zu bestimmen. Das hiebei einzuhaltende Verfahren, für das sich keine allgemeinen Regeln geben lassen, soll an einigen Beispielen erläutert werden.

1. Beispiel.

$$1)\ x + y = 36$$
$$2)\ xy = 288.$$

1. Auflösung.

Aus Gleichung 2) ist

$$x = \frac{288}{y}.$$

Diesen Werth in Gleichung 1) substituirt:

$$3)\ \frac{288}{y} + y = 36$$

oder $y^2 - 36y = -288$

„ $y^2 - 36y + 18^2 = -288 + 324$

„ $(y - 18)^2 = 36$

„ $y - 18 = \pm 6$

und daraus $y_1 = 24$

$y_2 = 12.$

Den Werth von y in 1) substituirt:

$x_1 = 12$

$x_2 = 24.$

Es ist also:

$$x_1 = y_2 = 12$$
$$x_2 = y_1 = 24.$$

2. Auflösung.

Aus 1) ist $x = 36 - y$

„ 2) „ $x = \frac{288}{y}.$

Also:

$$3)\ 36 - y = \frac{288}{y}.$$

u. s. w.

3. Auflösung.

Gleichung 1) quadrirt:

$$3)\ x^2 + 2xy + y^2 = 1296.$$

Gleichung 2) mit 4 multiplicirt:

$$4)\ 4xy = 1152.$$

Gleichung 4) von 3) subtrahirt:

$$5)\ x^2 - 2xy + y^2 = 144$$

oder $(x - y)^2 = 144$

" $x - y = \pm 12.$

Es sind nun die Werthe der Summe und Differenz beider Unbekannten gefunden. Aus diesen lassen sich die Unbekannten selbst unmittelbar bestimmen. Die eine Unbekannte ist nämlich nach § 19 gleich der halben Summe plus der halben Differenz und die andere gleich der halben Summe minus der halben Differenz. Mithin:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{36 \pm 12}{2} = \begin{matrix}24\\12\end{matrix} \\ y = \frac{36 \mp 12}{2} = \begin{matrix}12\\24\end{matrix} \end{array}\right\}.$$

2. Beispiel.

$$1)\ x^2 + y^2 = a$$

$$2)\ xy = b.$$

Gleichung 2) mit 2 multiplicirt:

$$3)\ 2xy = 2b.$$

Gleichung 1) und 3) addirt:

$$4)\ x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b$$

oder $(x + y)^2 = a + 2b$

folglich $5)\ x + y = \pm\sqrt{a + 2b}.$

Gleichung 3) von 1) subtrahirt:

$$6)\ x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b$$

oder $(x - y)^2 = a - 2b$

folglich $7)\ x - y = \pm\sqrt{a - 2b}.$

Man findet mithin:

$$8)\ x = \frac{\pm\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}}{2}$$

$$9)\ y = \frac{\pm\sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}}{2}.$$

3. Beispiel.

$$1)\ x^2 + y^2 = a$$
$$2)\ x + y = b.$$

Gleichung 1) mit 2 multiplicirt:

$$3)\ 2x^2 + 2y^2 = 2a.$$

Gleichung 2) quadrirt:

$$4)\ x^2 + 2xy + y^2 = b^2.$$

Gleichung 4) von 3) subtrahirt:

$$5)\ x^2 - 2xy + y^2 = 2a - b^2$$

oder $(x - y)^2 = 2a - b^2$

folglich $6)\ x - y = \pm \sqrt{2a - b^2}.$

Es ergiebt sich nun:

$$7)\ x = \frac{b \pm \sqrt{2a - b^2}}{2}$$

$$8)\ y = \frac{b \mp \sqrt{2a - b^2}}{2}.$$

Anmerkung. Bei der Lösung von Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führt, hat man zuweilen von folgenden zwei Sätzen der Planimetrie Gebrauch zu machen:

a) Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten;

b) der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe.

4. Beispiel.

Ein Kapital von 1500 Mark hat in einer gewissen Zeit 360 Mark Zinsen getragen. Als der Zinsfuß um 1% erniedrigt wurde, brachte das Kapital erst in einer 2 Jahr längeren Zeit dieselben Zinsen. Wie hoch war der anfängliche Zinsfuß und wie lange stand das Kapital?

Ist der ursprüngliche Zinsfuß	x
so ist der um 1% niedriger gestellte Zinsfuß . . .	$(x - 1)$
Ist die Zeit, in Jahren ausgedrückt	y
so ist die 2 Jahre längere Zeit	$(y + 2)$

Die Zinsen von 1500 Mark zu x% in y Jahren $\frac{1500 . xy}{100} = 15xy$

" " " " " " (x — 1)% in (y + 2)

Jahren . . . . $\frac{1500(x - 1) . (y + 2)}{100}$.

Da nun die Zinsen in beiden Fällen 360 Mark betragen, so erhält man, nachdem man den Ausdruck $\frac{1500(x - 1)(y + 2)}{100}$ durch Auflösung der Klammer in $15xy + 30x - 15y - 30$ verwandelt hat, die 2 Bestimmungsgleichungen:

1) $15xy = 360$

2) $15xy + 30x - 15y - 30 = 360$.

Gleichung 1) von Gleichung 2) subtrahirt:

3) $30x - 15y = 30$

oder durch 15 dividirt:

$$2x - y = 2$$

und daraus $x = \frac{2 + y}{2}$.

Diesen Werth von x in Gleichung 1) substituirt:

4) $15 . \frac{2 + y}{2} . y = 360$

oder $\frac{15y^2 + 30y}{2} = 360$

" $15y^2 + 30y = 720$

" $y^2 + 2y = 48$

" $y^2 + 2y + 1^2 = 48 + 1$

" $(y + 1)^2 = 49$

" $y + 1 = \pm \sqrt{49} = \pm 7$

$y = -1 \pm 7$

$y_1 = 6$ (Jahre)

$y_2 = -8$.

Setzt man den Werth von y_1 in Gleichung 1), so erhält man:

$15x . 6 = 360$

$90x = 360$

$x = \frac{360}{90} = 4$ (Procent).

Zur weiteren Uebung können die Beispiele in „M. Hirsch" und „Hofmann" unter: Gleichungen des 2. Grades mit mehreren Unbekannten dienen.

Fragen und Aufgaben.

1) Was ist eine Gleichung? In welche zwei wesentlich verschiedene Gruppen zerfallen die Gleichungen? Welcher Unterschied besteht zwischen ihnen?

2) Welche Verschiedenheit findet unter den algebraischen Gleichungen statt?

3) Auf welchen allgemeinen Grundsatz läßt sich die Auflösung der Gleichungen zurückführen? Welche für die Auflösung derselben wichtigen Umformungen ergeben sich aus demselben? In wiefern?

4) Wann heißt eine Gleichung geordnet? Welche Operationen müssen möglicherweise an einer gegebenen Gleichung vollzogen werden, um sie auf diese Form zu bringen?

5) In verschiedenen Anmerkungen des vorstehenden Abschnitts wurde auf manche Erleichterung und auch auf manche Fehlerquelle bei der Auflösung von Gleichungen besonders aufmerksam gemacht; auf welche?

6) Welcher wesentliche Unterschied findet zwischen der synthetischen und analytischen Auflösungsweise einer Aufgabe statt? Welcher von beiden gebührt der Vorzug? In wiefern?

7) Was bedeutet der Ausdruck: Eine Größe ist eine Function von mehreren andern Größen? Welcher besondere Vorzug der analytischen Auflösung von Aufgaben spricht sich in jeder Gleichung aus, die man unter einer solchen Gruppe von zusammengehörigen, durch Buchstaben angedeuteten Größen aufgestellt hat?

8) Man drücke durch Gleichungen den Zusammenhang unter folgenden Größen aus:

Wirkliche Schuld	c
Zeit, nach welcher sie zu zahlen ist .	t
Baarwerth jener Schuld . . .	b
Rabatt, c — b	r
Procente des Rabatts . . .	p

und zwar sowohl auf 100 als in 100!

9) Was versteht man unter der Elimination der Unbekannten? Welche Methoden hat man hiefür? Auf welchen Grundsatz stützt sich jede derselben? Worin besteht das Wesen einer jeden?

10) Die Bezout'sche Methode ist nur eine Modification der englischen Methode; in wiefern?

11) Wie viel Wurzeln hat jede gemischt-quadratische Gleichung? Welcher Natur können dieselben sein? Unter welchen Bedingungen ha-

ben sie die eine oder die andere Beschaffenheit? Man weise dies an Gleichungen folgender Art:

$$x^2 + 6x = -12 \text{ u. s. w.}$$

nach!

12) In welcher merkwürdigen Beziehung stehen die beiden Wurzeln einer gemischt-quadratischen Gleichung zu dem Coefficienten des 2. Gliedes und zu dem dritten Glied derselben?

13) In wiefern läßt sich dieser gesetzliche Zusammenhang (Frage 12) zur Bildung quadratischer Gleichungen für gegebene Wurzeln benützen?

14) Welche Gleichung gehört hiernach zu den Wurzeln 3 und 5, -1 und 2, -1 und -2, 8 und -9?

§ 30.

Vermischte Uebungsbeispiele aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra.

1) Man stelle in arithmetischer Form dar und berechne die Aufgabe, daß das Product der Zahlen $13\frac{4}{5}$ und $8\frac{4}{7}$ um den Quotienten aus $21\frac{10}{13}$ in $101\frac{1}{4}$ vermindert, diese Differenz durch die Summe aus dem Producte der Zahlen $6\frac{9}{16}$ und $\frac{13}{15}$ und dem Quotienten aus $22\frac{4}{7}$ in $\frac{5}{8}$ dividirt und zu dem erhaltenen Quotienten noch das Product aus $1\frac{2}{7}$ und $2\frac{13}{14}$ addirt werden soll.

2) Ebenso die Aufgabe, daß der Quotient aus 0,01 in 1,957 um das Product aus 9,86 und 7,5 vermindert und diese Differenz multiplicirt werden soll mit der Zahl, die sich ergiebt, wenn man 14,4592 um den Quotienten aus 190 in 58,9 vermehrt und von dieser Summe das Product aus 473,2 und 0,031 subtrahirt.

3) $\dfrac{ab + cd + be - fg}{bcx} : \dfrac{ac - cc + 3ax + 2bx}{dey} = ?$

4) $(3ab^5 - 4a^2b^4 + 6a^3b^3) \,.\, (7a^4b^2 - 9a^3b^3 + 11a^2b^4) = ?$

5) $\left(\dfrac{4a^3}{7b^5} - \dfrac{3}{8a^3b^4} - \dfrac{5}{9a^3}\right)\left(\dfrac{6a^4}{7b^2} - \dfrac{11b^4}{9} + 3\right) = ?$

6) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^4 . \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 . \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 . \left(\dfrac{8}{3}\right)^5 = ?$

7) $(4ax - 5a^2x^2 + 7)^2 = ?$

8) $(6ab^2 + 5a^2b - 4a^3b^3 + 7 - 9a^2b)^2 = ?$

9) $(4a - 2b + c)^3 = ?$

10) $\sqrt[3]{\dfrac{a^{-2}b^{4}d^{-5}}{c^{-5}}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{a^{-3}b^{-5}d^{7}}{c^{6}}} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{a^{2}b^{3}d^{9}}{c^{-7}}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{a^{-7}bc^{4}}{d^{8}}} = ?$

11) $\dfrac{3x - 5y + 6}{4} - \dfrac{2x - 4y + 5}{5} - \dfrac{4x - 7y + 2}{3} = ?$

12) $\dfrac{3a^2 + 7ab + 4b^2}{5a^2 - 11ab + 6b^2} = ?$ (zu reduciren!)

13) Welchen Werth hat folgender Ausdruck:

$$\frac{2((0{,}69 - 0{,}25)(2 - (0{,}75 \quad 1{,}5))2{,}04 - 0{,}46) - 0{,}008 \,.\, 2{,}1}{-4{,}5:(3{,}5-2)+(1-0{,}08):(0{,}2:0{,}05)-(4-2{,}5):100+135{,}7:20}$$

14) Es ist der Ausdruck:

$7x : (2\sqrt{3x} + \sqrt{5x} - \sqrt{7x})$ umzuformen!

15) Man verwandle folgende Ausdrücke in Producte:

a) $6ad + 4bd + 2cd + 9ae + 6be + 3ce$.

b) $5ad + 15bd + 20cd + 7ae + 21be + 28ce$.

c) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$.

d) $a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$.

e) $x^2 - a^2$.

16) Man bestimme den Werth von x aus folgenden Gleichungen:

a) $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2} = 4\frac{5}{8}$.

b) $2(4\left(\dfrac{3x - 60}{6} + 100\right) - 20) + 100 = 900$.

17) Welche Werthe haben x und y nach folgenden Angaben:

$x : 3\frac{1}{2} = y : 5\frac{19}{20}$ und

$y - x = \frac{7}{8}$.

18) Es sollen die Gleichungen:

a) $\dfrac{xy}{x + y} = \frac{1}{2}$

b) $\dfrac{xz}{x + z} = \frac{1}{4}$

c) $\dfrac{yz}{y + z} = \frac{1}{8}$

nach der Substitutionsmethode aufgelöst werden!

19) Aus folgenden Gleichungen sind die Werthe von x, y und z nach den 4 Eliminationsmethoden zu bestimmen:

a) $3x + 2y - z = 17$.

b) $5x - 3y + 4z = 37$.

c) $7x - y + 3z = 49$.

20) Drei Schriftsetzer sollen 98 Bogen setzen und à Bogen 12 Mark Setzerlohn erhalten.

A setzt in 15 Stunden $\frac{3}{4}$ Bogen,
B „ „ 18 „ $\frac{4}{5}$ „
C „ „ 20 „ $\frac{5}{6}$ „

Wie lange setzen sie an den 98 Bogen und wie viel erhält jeder seiner Leistung entsprechend?

21) 4 Kapitalien, von denen sich

das 1. zum 2. wie 2 : 3,
„ 2. „ 3. „ 6 : 7,
„ 3. „ 4. „ 1 : $1\frac{1}{3}$

verhält, tragen zusammen 4320 Mark Zinsen, wenn man

das 1. Kapital 4 Jahre zu $4\frac{1}{2}$ %
und „ 2. „ 6 „ „ $3\frac{3}{4}$ „
„ „ 3. „ 4 „ „ $4\frac{3}{4}$ „
„ „ 4. „ 3 „ „ 5 „

ausstehen läßt. Wie groß ist jedes Kapital?

22) Ein Privatier stellt ein Kapital zu 4 % auf Zinsen. Nach 3 Jahren nimmt er den 10. Theil des Kapitals zurück und läßt den Rest 8 Monate stehen. Nach Verlauf dieser Zeit nimmt er $\frac{1}{9}$ des nunmehrigen Kapitals zurück und läßt den entstandenen Rest $1\frac{1}{2}$ Jahre stehen. Am Ende dieser Zeit hatte er im Ganzen 3840 Mark Zinsen eingenommen. Wie groß war das anfängliche Kapital?

23) Die Oeffnungen zweier Wasserbehälter verhalten sich wie 6 : 11, die Geschwindigkeiten der ausfließenden Ströme wie 9 : 8. Aus der einen Oeffnung flossen in einer gewissen Zeit 374 c^{dm} Wasser mehr als aus der zweiten. Wie viel Wasser gab jede Oeffnung in dieser Zeit?

24) Jemand besitzt ein Gut, das im Durchschnitt 50688 Mark abwirft. Wie groß ist der Werth desselben, wenn

die Waldungen, die $\frac{1}{3}$ von seinem Kapitalwerth betragen, sich zu 10 %
„ Aecker „ $\frac{1}{4}$ „ „ „ „ „ „ 14 „
„ Wiesen „ $\frac{1}{5}$ „ „ „ „ „ „ 16 „
„ Weinberge „ $\frac{1}{6}$ „ „ „ „ „ „ 9 „
„ Gärten, die den Rest „ „ „ „ „ „ 4 „

rentiren?

25) 12 Personen können eine gewisse Arbeit in 120 Tagen bei 10stündiger täglicher Arbeitszeit vollenden. Nach 24 Tagen kommen noch 6 Arbeiter hinzu und nun wird täglich 12 Stunden lang gearbeitet. 12 Tage darauf gehen 3 Arbeiter weg und die übrigen arbeiten 12

Stunden lang. In wie viel Tagen wird die Arbeit nach Abgang dieser 3 Arbeiter fertig sein?

26) Von einer Summe Geldes, die unter eine gewisse Anzahl Personen vertheilt werden soll, erhält A 1000 Mark und $\frac{1}{7}$ des Restes; B 2000 Mark und wieder $\frac{1}{7}$ des Restes; von diesem Rest bekommt C 3000 Mark und wieder $\frac{1}{7}$ des Restes u. s. f. Auf diese Weise bekommen Alle gleich viel. Wie groß ist die zu theilende Summe? Wie viel bekommt jede Person? Wie viel Personen sind es?

27) Wenn man den 3., 4. und 6. Theil einer gewissen Zahl mit einander multiplicirt, so erhält man $\sqrt{26873856}$; wie heißt die Zahl?

28) Die Zahl 403 so in zwei Theile zu theilen, daß $\frac{1}{52}$ des ersten Theiles und $\frac{1}{7}$ des zweiten zusammen 19 geben. Welches sind die beiden Theile?

29) Man hat zwei hohle Würfel; gießt man eine gewisse Menge Wasser in den einen, so bleiben noch 3736 c^{cm} Raum in demselben übrig; damit der zweite Würfel diese Menge Wasser fassen könnte, müßte er um 296 c^{cm} größer sein. Wie viel beträgt jene Wassermenge? Wie groß ist jede Kante beider Würfel, wenn sie sich um 12 cm unterscheiden? Wie viel Wasser faßt jeder?

30) Von drei würfelförmigen Gefäßen ist das erste 5 cm höher als das zweite; dieses 5 cm höher als das dritte. Wenn man das zweite leere aus dem ersten vollen und hierauf das dritte leere aus dem zweiten vollen füllt, so enthält das erste noch $6\frac{3}{4}$ Liter mehr, als das zweite. Wie viel faßt jedes einzelne Gefäß?

31) Ein Kapital steht zu $5\,^0/_0$ auf Zinsen. Multiplicirt man die Anzahl der Mark des Kapitals mit der Anzahl der Mark der 7monatlichen Zinsen, so erhält man 37800000. Wie heißt das Kapital?

32) In ein Rechteck, dessen Seiten 40 m und 50 m sind, soll ein zweites eingeschrieben werden, dessen Inhalt gleich $\frac{3}{5}$ des ersten ist. Wenn nun die Seiten des kleineren überall gleichen Abstand von denen des größeren haben sollen, wie groß muß dieser Abstand genommen werden?

33) Drei Dörfer haben eine gewisse Zahl Schulkinder. Legt man zu der Anzahl des Dorfes B und ebenso zu der des Dorfes C $\frac{1}{3}$ der Zahl des Dorfes A, hierauf von der nun entstandenen Anzahl in B $\frac{1}{5}$ davon zu A und $\frac{1}{5}$ zu C, endlich von der Anzahl, die nunmehr das Dorf C enthält, $\frac{1}{7}$ zu A und $\frac{1}{7}$ zu B, so würden sich in jedem Dorfe 75 Schulkinder befinden. Wie groß ist die Anzahl der Schulkinder in jedem der 3 Dörfer? (Hofmann.)

§ 31.

Anwendung der Algebra auf Aufgaben aus der Physik und Chemie.

I.

Gleichförmige Bewegung.

Es soll der Zusammenhang zwischen den 3 Größen: Geschwindigkeit, Zeit und Weg, durch Gleichungen ausgedrückt werden!

Ist

die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden Körpers . c
„ in Sekunden ausgedrückte Zeit der Bewegung . . . t
und die in dieser Zeit durchlaufene Wegstrecke . . . . s

so erhält man über den gegenseitigen Zusammenhang dieser 3 Größen c, t und s folgende Gleichungen:

1) $s = ct$

2) $c = s : t$

3) $t = s : c$.

1) Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Aequatorbewohners bei der täglichen Drehung um die Erdachse und wie groß ist die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne, wenn sie 20 Millionen Meilen von derselben entfernt ist?

2) Wie viel Umdrehungen muß ein Rad von 1,4 m Durchmesser in der Stunde machen, wenn ein Punkt der Peripherie eine Geschwindigkeit von 12,5 m haben soll?

3) An welchem Punkte einer $d = 1400'$ langen Schußlinie wird zu gleicher Zeit der Schall des abgeschossenen Gewehres und der reflectirte Schall von dem Anprallen der Kugel an die Scheibe ankommen, wenn die Schnelligkeit der Kugel $= c = 1500'$, die des Schalles $= s = 1050$ ist?

4) Zwei Sekunden nach dem Abschießen eines Gewehres hört man am Schießstande den Schall von der getroffenen Scheibe. Wie lang war die Schußlinie? (Helmes.)

II.

Gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung.

a) Es soll für den freien Fall der Zusammenhang zwischen
der in Sekunden ausgedrückten Zeit . . . . . . t
der am Ende derselben erlangten Geschwindigkeit . . . v
dem in der ganzen Zeit durchlaufenen Raum . . . s
der Beschleunigung . . . . g (= 9,81)
und dem Fallraum in der ersten Sekunde . . $\frac{g}{2}$ (= 4,9)
durch Gleichungen ausgedrückt werden!

Da nach einem Galilei'schen Fallgesetze die am Ende der 1. Sekunde erlangte Geschwindigkeit doppelt so groß als der in der 1. Sekunde zurückgelegte Weg ist, und ferner die Fallräume den Quadraten der Fallzeiten proportional sind, so erhält man zunächst:

$$1)\ v = gt$$

$$2)\ s = \frac{g}{2}t^2.$$

Aus 1) folgt $$3)\ t = \frac{v}{g}.$$

" 2) " $$4)\ t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Den Werth von t aus 4) in 1) substituirt:

$$5)\ v = \sqrt{2gs}$$

und hieraus $$6)\ s = \frac{v^2}{2g}.$$

b) Bezeichnet man die Anfangsgeschwindigkeit, mit der ein Körper vertical aufsteigt, durch c
die in Sekunden ausgedrückte Zeit durch . . . . t
die Endgeschwindigkeit nach t Sekunden durch . . . v
die Beschleunigung durch . . . . g
und die Höhe, die er erreicht, durch . . . . . . h,
so erhält man für die gleichförmig verzögerte Bewegung zunächst folgende 2 Gleichungen:

$$1)\ v = c - gt$$

$$2)\ h = ct - \frac{g}{2}t^2.$$

Aus 1) folgt $3)\ t = \frac{c - v}{g}.$

„ 2) „ $4)\ t = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2gh}}{g}.$

Ferner lassen sich noch folgende 2 Formeln ableiten:

$$5)\ h = \frac{c^2 - v^2}{2g}$$

$$6)\ v = \sqrt{c^2 - 2gh}.$$

1) Ein von der Ruhe aus frei fallender Körper braucht t = 4, 6, 10 Sekunden, um eine gewisse Höhe zu durchlaufen; wie groß ist seine Geschwindigkeit v nach dieser Zeit und wie groß die durchlaufene Wegstrecke s?

2) Wenn man die Endgeschwindigkeit v eines frei fallenden Körpers = 39,24, 58,86 und die Fallzeit t bezüglich 4 und 6 Sekunden gefunden hätte, wie groß wäre alsdann die Beschleunigung g des Falles?

3) Ein Körper fällt mit einer Geschwindigkeit von 100,062 m auf; wie lange hat der Fall gedauert; welchen Weg hat er durchlaufen?

4) In welcher Zeit t durchläuft ein frei fallender Körper einen Weg von 122,625; 397,305 m?

5) Wie groß ist die Beschleunigung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, bei welcher in 30 Sekunden ein Weg von 4050 m zurückgelegt wird?

6) Welche Geschwindigkeit v erlangt ein Körper, der aus einer Höhe s = 176,58 m herunter fällt?

7) Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit c = 36 Meter vertical in die Höhe geworfen. Wann wird derselbe die Erhebung h = 54 Meter über dem Boden haben?

8) Wie hoch wird ein Körper gestiegen sein, der, vertical in die Höhe geworfen, nach 20 Sekunden wieder zur Erde kommt?

9) Ein Brunnen ist 100 Meter tief. Wie viel Zeit wird zwischen dem Augenblick, in welchem man einen Stein in denselben fallen läßt und dem verstreichen, in welchem man das Aufschlagen des Steines hört?

10) Man läßt einen Stein in eine Grube fallen und hört ihn nach 6, 10 Sekunden aufschlagen. Wie tief ist dieselbe?

11) Bei einem Steinregen vergingen 10, (15) Sekunden zwischen dem Knalle einer Feuerkugel und dem Ankommen der abgesplitterten Steine am Boden. In welcher Höhe zerplatzte die Kugel?

III.

Hebel.

Am Hebel ist Gleichgewicht vorhanden, wenn das statische Moment der Kraft (das Product einer Kraft mit ihrem Hebelarme) gleich ist dem statischen Moment der Last (dem Product der andern Kraft mit ihrem Hebelarm). Ist ein physischer Hebel nicht in seinem Schwerpunkt unterstützt, so hat man das Gewicht der Hebelarme als in den Schwerpunkten derselben wirkend anzusehen und das statische Moment derselben mit in Rechnung zu bringen.

1) Zwei Gewichte von p und q Pfund hängen an den Enden einer a Meter langen Stange. An welcher Stelle muß die Stange zur Bildung des Gleichgewichts unterstützt werden?

2) Zwei Hebelarme verhalten sich wie m : n. An ihren Endpunkten sollen Gewichte ins Gleichgewicht gebracht werden, die zusammen R Kilogramm wiegen. Wie müssen diese vertheilt werden?

3) Die Arme eines im Gleichgewicht befindlichen Hebels sind 4 und 5 Dezimeter lang. An dem längeren Arm hängen 10 Kilogramm weniger als am kürzeren. Wie viel Kilogramm trägt jeder Hebelarm?

4) Die Länge eines physischen Hebels AB von prismatischer Form und homogener Masse sei 24 Meter, sein Gewicht 96 Pfund, sein Stützpunkt 4 Meter von A entfernt und am Endpunkte A hängen 300 Pfund. Welches Gewicht am Endpunkt B bringt den Hebel ins Gleichgewicht?

5) Die Länge eines ähnlichen Hebels sei = 20 Meter, sein Gewicht = 40 Kilogramm, und an seinen Endpunkten hängen die Gewichte 50 und $11\frac{3}{4}$ Kilogramm. Wo liegt der Unterstützungspunkt?

IV.

Gewichtsverlust der Körper im Wasser. Spezifisches Gewicht der Körper.

a) Es soll der Zusammenhang zwischen den 3 Größen: absolutes Gewicht, Volumen und spezifisches Gewicht eines Körpers durch Gleichungen ausgedrückt werden!

Bezeichnet man
das absolute Gewicht eines Körpers mit . . . . . p
„ Volumen desselben mit v
und das spezifische Gewicht desselben mit . . . . . s,
so erhält man über die gegenseitige Beziehung dieser Größen die folgenden Gleichungen:

$$1)\ p = vs$$
$$2)\ s = p : v$$
$$3)\ v = p : s.$$

b) Das absolute Gewicht eines Körpers sei = p, sein spezifisches Gewicht = s' (größer als das des Wassers). Welche Gewichtsmenge eines zweiten Körpers vom spezifischen Gewicht = s'' (kleiner als das des Wassers) muß mit diesem verbunden werden, damit ein Körper entstehe, der gerade so im Wasser schwimme, wie ein homogener Körper vom spezifischen Gewicht = s?

Das Volumen des 1. Körpers ist . . . . $\frac{p}{s'}$

„ „ „ 2. „ , dessen Gewicht = x sei . . $\frac{x}{s''}$

„ „ beider Körper ist also . . . . . $\frac{p}{s'} + \frac{x}{s''}$

und das Gewicht beider Körper ist folglich . . $\left(\frac{p}{s'} + \frac{x}{s''}\right)s$

das Gewicht beider Körper ist aber auch andererseits . $p + x$.
Mithin ergiebt sich die Gleichung:

$$\left(\frac{p}{s'} + \frac{x}{s''}\right)s = p + x.$$

Hieraus folgt: $$x = \frac{s''(s' - s)}{s'(s - s'')} \cdot p.$$

Anmerkung. Ist das Gewicht der Verbindung beider Körper gegeben und es soll bestimmt werden, wie viel von jedem Stoffe zu nehmen ist, so bezeichnet man die Gewichtsmenge des einen Körpers mit x, die des andern mit y und verfährt im Uebrigen wie unter b).

c) Ein Körper, welcher aus zwei Stoffen A und B zusammengesetzt ist, wiegt a Kilogramm und verliert im Wasser p Kilogramm. Vom Körper A verlieren b Kilogramm im Wasser m Kilogramm und vom Körper B verlieren c Kilogramm n Kilogramm. Wie viel Kilogramm von jedem Stoffe befinden sich in dem Körper?

Der Körper enthalte vom Stoffe A, in Kilogramm ausgedrückt, . x

" " " " " B, " " " . y.

Es ist daher:

$$1)\ x + y = a.$$

Vom Stoffe A verlieren b Kilogramm m Kilogramm, x also $\frac{m}{b} \cdot x$

" " B " c " n " y " $\frac{n}{c} \cdot y$

Da der Körper im Wasser nach der Aufgabe p Kilogramm verliert, so erhält man:

$$2)\ \frac{mx}{b} + \frac{ny}{c} = p.$$

Aus diesen 2 Gleichungen ergiebt sich:

$$x = \frac{cp - an}{cm - bn} \cdot b$$

$$y = \frac{bp - am}{bn - cm} \cdot c.$$

1) Eine aus Gold und Silber gemachte Krone des Königs Hiero von Syracus wog 20 Pfund und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund. Wie viel Gold und wie viel Silber mußte dieselbe enthalten, wenn das spezifische Gewicht des ersteren Metalls = 19,64 und das des letzteren = 10,5 angenommen wird? (Für die arithmetische Lösung dieser Aufgabe kann man annehmen, daß das Gold $\frac{1}{19}$, das Silber $\frac{1}{10}$ seines Gewichts im Wasser verliert.)

2) Das spezifische Gewicht des Bleies ist 11,324, das des Korkes 0,24 und das des Tannenholzes 0,45. Es soll berechnet werden, wie viel Kork mit 40 Kilogramm Blei verbunden werden müssen, damit ein Körper entstehe, der wie Tannenholz schwimme!

3) Wie viel Pfund Blei und Korkholz muß man verbinden, um einen 80 Pfund schweren Körper zu erhalten, der dasselbe Volumen hat, wie ein gleichschwerer Körper aus Tannenholz?

4) Wie viel Kilogramm Kork müssen mit einem Kilogramm Silber verbunden werden, damit dasselbe im Wasser schwebe?

5) Wie groß müßte ein goldener Würfel sein, um 1 Million fl. werth zu sein, wenn das spezifische Gewicht des Goldes 19,258 ist und 1 Kilogramm Gold 1600 fl. kostet? (Reis.)

6) 21 Pfund Silber verlieren im Wasser 2 Pfund und 96 Pfund Gold 5 Pfund. Eine Komposition von Silber und Gold, welche 276 Pfund wiegt, verliert im Wasser 18 Pfund. Wie viel Gold und Silber ist in dieser Komposition?

7) Ein Körper besteht aus 2 Metallen, wiegt p Kilogramm und hat das spezifische Gewicht s. Die spezifischen Gewichte der beiden Metalle sind s' und s". Wie viel Kilogramm wiegen seine beiden Bestandtheile?

8) Das Volumen zweier Körper beträgt zusammen 40 Kubikdecimeter. Das absolute Gewicht eines jeden ist 96 Kilogramm; ihre specifischen Gewichte unterscheiden sich um 2. Wie groß ist jeder Körper?

V.

Abnahme der Stärke des Schalles, des Lichts und der Anziehung.

Zwei Glocken, Lichter oder Himmelskörper A und B sind a = 18 Maßeinheiten von einander entfernt; die Intensitäten des Schalles beider Glocken, des Lichts der 2 Lichter, die Massen der beiden Weltkörper verhalten sich wie m : n = 4 : 1. An welchem Punkte der Verbindungslinie dieser Körper wird man den Schall der beiden Glocken gleich stark hören, das Licht der beiden Lichter gleich stark sehen, die Anziehung der beiden Himmelskörper gleich groß finden?

Die Physik lehrt, daß die Stärke des Schalles, des Lichtes, der Anziehung im quadratischen Verhältniß der Entfernung abnimmt. Bezeichnet man nun die Entfernung des zu findenden Punktes C von dem Körper A mit x, so ist die Entfernung dieses Punktes vom Körper B = a — x. Die Quadrate dieser Entfernungen sind: x^2 und $(a - x)^2$. Obigem Gesetze zu Folge sind nun die Schall- und Lichtstärken und die Intensitäten der Anziehung von A und B im Punkte C $\frac{m}{x^2}$ und $\frac{n}{(a-x)^2}$

Folglich ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{m}{x^2} = \frac{n}{(a - x)^2}$$

und hieraus:

$$x = \frac{am \pm \sqrt{mn}}{m - n}.$$

Substituirt man die bestimmten Zahlen, so erhält man:

$$x_1 = 12$$
$$x_2 = 36.$$

Von diesen beiden Werthen giebt der erste die Lage des zu suchenden Punktes C zwischen den beiden Körpern (12 Längeneinheiten von A

entfernt), der andere aber in der durch die beiden Körper gehenden geraden Linie (18 Längeneinheiten über B hinaus) an.

1) Die Schallstärken zweier Glocken, die 500 Meter von einander entfernt sind, verhalten sich zu einander wie 9 : 1. In welchen Punkten der sie verbindenden geraden Linie wird man den Schall der beiden Glocken gleich stark hören?

2) Zwei Instrumente, deren Tonstärken sich zu einander wie 3 : 4 verhalten, sind 24 Meter von einander entfernt. In welchen Punkten der sie verbindenden geraden Linie wird man beide Instrumente gleich stark hören?

3) Die Stärke zweier Lichter, die 5 Meter von einander entfernt sind, verhalten sich wie 6 : 1. Welche Punkte der durch sie gehenden geraden Linie werden von ihnen gleich stark erleuchtet sein?

VI.

Das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz.

Es soll der algebraische Ausdruck dieses Gesetzes gefunden werden!

a) Das Volumen einer gegebenen Gas- oder Dampfmenge ist, wie die Physik lehrt, von zweierlei abhängig: von dem Druck, dem sie ausgesetzt ist und von ihrer Temperatur. Je stärker der sie zusammenpressende Druck wird, desto kleiner wird ihr anfänglicher Raum. Wird z. B. der Druck doppelt so groß, so wird sie hiedurch auf die Hälfte ihres früheren Volums zusammengedrückt. Ueberhaupt verhält sich nach dem Mariotte'schen Gesetz das Volumen einer gewissen Gasmenge umgekehrt wie der Druck, dem sie ausgesetzt ist. Bezeichnet man daher
das Volumen einer Gasmenge unter dem Druck P mit . . V
" " derselben Gasmasse unter dem Druck p mit . . v
so erhält man für das Mariotte'sche Gesetz die Formel:

$$1)\ V : v = p : P.$$

b) Um die Volumen verschiedener Gase mit einander vergleichen zu können, werden sie gewöhnlich auf einen Druck von 760 Millimeter (Normaldruck) berechnet (reducirt), d. h. man berechnet, wie groß das Volumen V einer Gasmenge, die unter dem Druck b das Volumen v hat, sein würde, wenn sie dem Druck einer Quecksilbersäule von 760

Millimeter ausgesetzt wäre. Nach dem Mariotte'schen Gesetz ergiebt sich für diese Berechnung die Gleichung:

$$2)\ V = \frac{b}{760} \cdot v.$$

c) Bei unverändert bleibendem Drucke dehnen sich die permanenten Gase nach dem Gay-Lussac'schen Gesetz unter dem Einfluß der Wärme für jeden Temperaturgrad des 100theiligen Thermometers um $\frac{1}{273}$ (= 0,003665) ihres bei 0^0 gemessenen Volums aus. Nimmt also eine Gasmenge

bei 0^0 273 Raumtheile ein, so nimmt sie ein
„ 1^0 274 „ d. i. $273(1 + \frac{1}{273})$ oder $273(1 + 0{,}003665 \cdot 1)$;
bei 2^0 275 Raumtheile, d. i. $273(1 + \frac{2}{273})$ oder $273(1 + 0{,}003665 \cdot 2)$;
bei 3^0 276 Raumtheile, d. i. $273(1 + \frac{3}{273})$ oder $273(1 + 0{,}003665 \cdot 3)$;
bei 273^0 546 Raumtheile, d. i. $273(1 + \frac{273}{273})$ oder $273(1 + 0{,}003665 \cdot 273)$;
bei t^0 273 + t Raumtheile, d. i. $273\left(1 + \frac{t}{273}\right)$ oder $273(1 + 0{,}003665 \cdot t)$.

Bezeichnet man nun das Volumen irgend einer Gasmenge bei 0^0 C und einem Druck von 760 Millimeter mit V_0, so ist dasselbe bei t^0 C und demselben Druck =

$$3)\ V_0\left(1 + \frac{t}{273}\right) \text{ oder } V_0(1 + 0{,}003665 \cdot t)$$

und bei t^0 C und einem Druck von b Millimeter =

$$4)\ \frac{760 \cdot V_0\left(1 + \frac{t}{273}\right)}{b} \text{ oder } \frac{760 \cdot V_0(1 + 0{,}003665 \cdot t)}{b}.$$

Nennt man nun dieses Volumen bei t^0 C und b Millimeter = v, so erhält man:

$$v = \frac{760 \cdot V_0\left(1 + \frac{t}{273}\right)}{b} \text{ oder } \frac{760 \cdot V_0(1 + 0{,}003665 \cdot t)}{b}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$5)\ V_0 = \frac{bv}{760 \cdot \left(1 + \frac{t}{273}\right)} \text{ oder } V_0 = \frac{bv}{760(1 + 0{,}003665 \cdot t)}.$$

Die durch Gleichung 4) und 5) dargestellte Beziehung wird mit dem Namen des **Mariotte-Gay-Lussac'schen** Gesetzes bezeichnet. Die Berechnung von V_0 nach Gleichung 5), wenn v gegeben ist, nennt man auch die Reduction des Volumens auf die Normaltemperatur und den Normaldruck oder kurz **die Reduction auf den Normalzustand.**

1) Eine Gasmenge nimmt bei 750 Millimeter Druck ein Volumen von 540 Kubikdecimeter ein; welchen Raum bei einem Druck von 760 Millimeter?

2) Welches Volumen nehmen 100 Kubikdecimeter eines Gasquantums von 0^0 ein, wenn dasselbe bei unverändertem Druck auf 100^0 erwärmt wird?

3) Welchen Raum nehmen 18 Kubikcentimeter von 13^0 und 760 Millimeter Druck bei 0^0 und demselben Druck ein?

4) Welches ist das auf 0^0 und 760 Millimeter reducirte Volumen von 18 Liter eines Gases bei 13^0 und einem Druck von 755 Millimeter?

VII.

Stöchiometrische Aufgaben.

Unter **Stöchiometrie** versteht man einerseits die Lehre von den Gesetzen für die bestimmten quantitativen Verhältnisse, nach denen sich chemische Verbindungen bilden, und andererseits die Lehre von den mathematisch-chemischen Berechnungen, welche in jenen Gesetzen begründet sind. Zur Lösung der folgenden Aufgaben ist die Kenntniß der chemischen Verbindungsgewichte, Formeln und Gleichungen nöthig. Man vergleiche hierüber die „Grundzüge der Chemie" vom Verfasser.

a) Berechnung des Procentgehaltes der Bestandtheile chemischer Verbindungen.

1) Wie viel Procent Hg und O enthält HgO?

Aus der Formel HgO folgt, daß 1 Verbindungsgewicht = 216 Gewichtstheile HgO 1 Verbindungsgewicht = 200 Gewichtstheile Hg und 1 Verbindungsgewicht = 16 Gewichtstheile O enthält. Mithin:

$$HgO : Hg = 100 : x; \quad HgO : O = 100 : x$$
$$216 : 200 = 100 : x; \quad 216 : 16 = 100 : x.$$

Hieraus folgt:

92,59 % Hg
7,41 % O.

2) In gleicher Weise berechne man den Procentgehalt der Bestandtheile folgender Verbindungen:

Kohlendioxid	CO_2.	Salpetersäure	HNO_3
Schwefelsäure	H_2SO_4.	Wasser	H_2O
Calciumhydroxid	CaH_2O_2.	Zinnober	HgS.
Kochsalz	$NaCl$.	Ammoniak	H_3N.
Schwerspath	$BaSO_4$.	Salpeter	KNO_3.
Potasche	K_2CO_3.	Kaliumchlorat	$KClO_3$.
Bittersalz	$MgSO_4 + 7H_2O$.	Gips	$CaSO_4 + 2H_2O$.

b) Berechnung der Gewichtsmengen der bei chemischen Processen auftretenden Elemente oder Verbindungen.

1) Wie viel Gramm O erhält man durch Glühen von 60 Gramm chlorsaurem Kalium?

Aus der diese Zersetzung ausdrückenden Gleichung: $KClO_3 = KCl + O_3$ folgt, daß man aus 1 Verbindungsgewicht = 122,5 Gewichtstheilen chlorsaurem Kalium 3 Verbindungsgewichte = 3 . 16 = 48 Gewichtstheile Sauerstoff erhält. Mithin:

$$KClO_3 : 30 = 60 : x$$
$$(39 + 35{,}5 + 3.16) : 3.16 = 60 : x$$
$$122{,}5 : 48 = 60 : x.$$

Hieraus folgt: $x = 23{,}51$ Gramm O.

2) Wie viel Gramm O erhält man durch Glühen von 40 Gramm HgO?

3) Man will 11,76 Gramm O darstellen. Wie viel Gramm chlorsaures Kalium braucht man hiezu? Wie viel Gramm Chlorkalium bleiben im Rückstand?

4) Wie viel Gramm Zn und H_2SO_4 gebraucht man zur Darstellung von 9 Gramm H?

5) Wie viel Gramm krystallisirtes schwefelsaures Zink, $ZnSO_4 + 7H_2O$, erhält man bei der vorigen Reaction?

6) Wie viel Gramm HCl erhält man aus 800 Gramm NaCl, und wie viel wiegt das dabei erhaltene Na_2SO_4?

7) Wie viel Centner Schwefelsäure erhält man aus 50 Ctr. S, wenn alles SO_2 in H_2SO_4 übergeführt wird?

8) Man will 100 Gramm Cl darstellen. Wie viel Gramm MnO_2 und HCl sind hiezu erforderlich?

9) Wie viel CO_2 und Alkohol entsteht bei der geistigen Gährung von 24 Gramm Rohrzucker?

c) Berechnung des Volumens der bei chemischen Reactionen frei auftretenden gasförmigen Elemente oder Verbindungen.

Das Gewicht eines Liters H unter den Normalbedingungen der Temperatur und des Drucks, also bei 0^0 C und 760 Millimeter Barometerstand, beträgt nach genauen Wägungen 0,0894 oder abgerundet 0,09 Gramm. Dieses Wasserstofflitergewicht nennt man ein **Krith.** Das absolute Gewicht eines Liters aller Gase und Dämpfe ist gleich dem Volumgewicht derselben in Krithen. Mithin wiegt ein Liter O bei 0^0 C und 760 Millimeter Druck = 16 Krith, d. i. 16 . 0,09 Gramm; ein Liter N = 14 Krith; ein Liter Cl = 35,5 Krith; denn die Volumgewichte dieser Elemente sind der Reihe nach 16, 14, 35,5.

1) Wie viel Liter O von 0^0 C und 760 Millimeter Druck erhält man durch Glühen von 490 Gramm chlorsaurem Kalium? (Man vergleiche Aufgabe 1) unter b).

$$122{,}5 : 48 = 490 : x$$

Hieraus $x = 192$ Gramm O oder

$$\frac{192}{16 \,.\, 0{,}0894} = 134{,}22 \text{ Liter.}$$

2) Wie viel Gramm H_2O muß man durch den galvanischen Strom zersetzen, um 40 Liter H zu erhalten?

3) Wie viel Liter H erhält man beim Lösen von 200 Gramm Zn in verdünnter H_2SO_4?

4) Wie viel Liter Cl erhält man mittelst 150 Gramm MnO_2?

5) Man will 50 Liter CO_2 darstellen. Wie viel Gramm Marmor braucht man hiezu?

6) Man will 450 Liter H bei 18^0 und einem Druck von 745 Millimeter darstellen. Wie viel Zn gebraucht man hiezu?

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.